МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КОМИТЕТ ОБРАЗОВАНИЯ АДМИНИСТРАЦИИ Г.УСТЬ-ИЛИМСКА
МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 1»

666671, РФ, Иркутская область,
г. Усть-Илимск, ул. Романтиков, д,14, а/я 96 телефон/факс 8(39535)7-12-41

Утверждаю:
Приказ № 229– о
от «30» августа 2024 г.
Директор школы _____ М.И. Антипин

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 3D81546C7B23DACD6419F0728478CD60
Владелец: Антипин Михаил Иванович
Действителен: с 04.03.2024 до 28.05.2025

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

(элективный курс)

Разработчик:
Махлачева Наталья Александровна,
учитель математики

г. Усть-Илимск, 2024 г.

Содержание

Введение

Нередко в жизни возникают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнивать, оценивать рациональность и выбирать то, которое больше всего подходит для конкретной ситуации. Например, при рассмотрении меню обеда в соловой человек составляет комбинации из различных блюд, после чего делает выбор согласно своему вкусу и совместимости продуктов. Для описанной ситуации уместно составление математической модели, базирующейся на рассмотрении определенного рода множеств и подмножеств, установлении связи между их элементами и пр. Таким образом, ситуация с обедом сведется к решению задачи на перебор различных вариантов. Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся их решением – комбинаторикой.

Комбинаторика – раздел математики, изучающий комбинации и перестановки предметов, «казалось долгое время, лежала вне основного русла развития математики и ее приложений» (Н.Я. Виленкин) [2, с.19]. Из области, интересовавшей большей частью составителей занимательных задач и находившей основные применения в кодировании и расшифровке древних письменностей, она превратилась в область, находящуюся на магистральном пути развития наук.

На современном этапе включение элементов статистики, комбинаторики и теории вероятностей является важнейшим направлением модернизации школьного курса математики. Согласно анализу задачного материала по теме «Комбинаторика» в содержании действующих школьных учебников, нами было отмечено следующее. Существует целый ряд базисных комбинаторных упражнений, но при этом в школьных учебниках практически исключен из рассмотрения отдельный класс комбинаторных задач – задания геометрического содержания. Поэтому в данном исследовании мы посчитали необходимым рассмотреть возможность включения комбинаторных задач геометрического содержания в школьном курсе математики, показать их практическую значимость для школьников.

Объект исследования: теоретические основы решения комбинаторных задач геометрического содержания.

Предмет исследования: содержание и организация курса по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания».

Цель исследования: разработка и описание содержательных и организационных аспектов курса по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания» для 9 класса общеобразовательной средней школы.

Достижение цели осуществлялось посредством решения следующих *задач*:

1) осуществить анализ учебной и учебно-методической литературу по теме исследования, содержания периодических источников;

2) подобрать, решить и составить задачи по теме «Комбинаторные задачи геометрического содержания»;

3) продумать содержание курса по выбору, последовательность изложения учебного материала в ходе его проведения;

4) описать методические рекомендации по проведению курса по выбору.

Методы исследования: анализ математической, учебно-методической литературы, обработка результатов, конструирование методических материалов.

Практическая и научная значимость работы: содержание курса по выбору может быть полезным для проведения занятий с учащимися общеобразовательной школы, а так же учащимся и студентам (будущим учителям математики), занимающимся учебно-исследовательской деятельностью в данном направлении.

Структура и объем работы: работа состоит из введения, двух глав, библиографического списка, приложений.

В первой главе освещены основы теории комбинаторики, приведен краткий обзор элементов комбинаторики, приведены примеры комбинаторных задач геометрического содержания. Во второй главе приведена разработка курса по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания» для учащихся 9 класса, изложены рекомендации по его проведению. В заключении работы подведены итоги исследования.

1. Теоретические основы решения комбинаторных задач геометрического содержания

В данной главе рассмотрены теоретические основы решения комбинаторных задач: описаны основные понятия и формулы комбинаторики, проанализирована теория комбинаторных соединений; приведены результаты анализа учебно-методической литературы по теме исследования.

1.1. История развития комбинаторики

Различные комбинаторные задачи человечество решало с незапамятных времен. Комбинаторика как наука стала развиваться в *VIII* в. параллельно с возникновением теории вероятностей, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитать число различных комбинаций элементов. Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым Дж. Кардана, Н. Тарталье (ок. *1499 – 1557*), Г. Галилею (*1623 – 1662*) и П. Ферма. К концу *XVI* века накопились знания комбинаторики относительно свойств фигурных чисел, построения магических (и иных числовых) квадратов, свойств биномиальных коэффициентов и другие.

Термин «комбинаторика» был введен в математический обиход знаменитым немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (*1.07.1646 – 14.11.1716*), который занимался философией, математикой, физикой, организовал Берлинскую академию наук и стал её первым президентом. В математике вместе с И. Ньютоном Готфрид Вильгельм разделяет честь создателя дифференциального и интегрального исчислений.

В *1666* г. Г. Лейбниц опубликовал «Рассуждения о комбинаторном искусстве»,в которых вводя специальные символы, термины для подмножеств и операций над ними он отыскал все *k* – сочетания из *n* элементов выводит свойства сочетаний ($C_n^k = C_n^{n-k},\ C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1},\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$), построил таблицы сочетаний до $n = k = 12$, после чего провел рассуждения о приложениях комбинаторики к логике, арифметике, к проблемам стихосложения и др.

В течение всей своей жизни Г. Лейбниц многократно возвращался к идеям комбинаторного искусства, понимая комбинаторику как составляющую любого исследования, любого творческого акта, предполагающего сначала анализ (расчленение целого на части), а затем синтез (соединение частей в целое). Мечтой ученого, оставшейся, увы, неосуществимой, оставалось построение общей комбинаторной теории. Комбинаторике Г. Лейбниц предрекал блестящее будущее, широкое применение.

В *XVIII* веке к решению комбинаторных задач обращались выдающиеся математики. Так, Леонард Эйлер рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, о циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов.

В *1713* году было опубликовано сочинение Я. Бернулли «Искусство предложений», в котором с достаточной полнотой были изложены известные к тому времени комбинаторные факты. «Искусство предложений» появилось после смерти автора и не было им завершено. Сочинение состояло из четырех частей, комбинаторике была посвящена вторая часть, в которой содержались формулы числа перестановок из n элементов, числа сочетаний (называемого Я. Бернулли классовым числом) без повторений и с повторениями, числа размещений с повторениями и без повторений.

Для вывода формул автор использовал наиболее простые и наглядные методы, сопровождая их многочисленными таблицами и примерами. Сочинение Я. Бернулли превзошло работы его предшественников и современников систематичностью, простотой методов, строгостью изложения и в течение *XVIII* века пользовалось известностью не только как серьезного научного трактата, но и как учебно-справочного издания. В работах Я. Бернулли и Г. Лейбница были тщательно изучены свойства сочетаний, размещений, перестановок. Перечисленные комбинаторные объекты были отнесены к основным комбинаторным конфигурациям.

В *XIX* веке в математике появился термин «геометрическая конфигурация» в лекциях по проективной геометрии профессора университета в Страсбурге К. Т. Рейе (*1882* г.). В *1896* г. американский математик Элиаким Гастингс Мур (*1862 – 1932*) в статье «Tactical memoranda» ввел термин тактическая конфигурация понимая под этим термином систему n множеств, содержащих, соответственно, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементов. К тактическим конфигурациям Э. Мур отнес сочетания, размещения, системы решений задачи Киркмана о *15* школьницах, подгруппы некоторых групп. Он продемонстрировал широкий спектр задач из геометрии, теории групп, приводящих к тактическим разложениям или их использованию, подчеркивал высокую значимость тактических задач в алгебре. Э. Мур обогатил список известных комбинаторных конфигураций построением новых, обобщающих системы троек Штейнера, и системы троек Киркмана. Э. Мур построил системы $S\ [k, l, m]$, $m \geq k \geq 1$ (m, k, l – натуральные числа), содержащие такие k – сочетания (блоки) из m элементов, что каждое l – сочетание входит точно в одно k – сочетание. Число k – сочетаний в системе S $[k, l, m]$ равно $\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-l+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-l+1)}$.

Термин «тактика» ввел в математику английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр (*1814 – 1897*) в *1861* году. Д. Сильвестр определял тактику, как раздел математики, изучающий расположение элементов друг относительно друга. В сфере этого раздела находится, по мнению Д. Сильвестра, теория групп, комбинаторный анализ и теория чисел.

Комбинаторика, пройдя многовековой путь развития, обретя собственные методы исследования, с одной стороны, широко используется при решении задач алгебры, геометрии, анализа, с другой стороны, сама использует геометрические, аналитические и алгебраические методы исследования. В конце *XVIII* века ученые, принадлежащие комбинаторной школе Гинденбурга, попытались построить общую комбинаторную теорию, используя бесконечные ряды. Исследователи этой школы изучили большое количество преобразований рядов: умножение, деление, возведение в степень, извлечение корней, обращение рядов, разложение трансцендентных функций. Использование производящих функций в комбинаторике можно отнести к уже классическим традициям.

В *XX* веке комбинаторика подверглась мощному процессу алгебраизации благодаря работам Дж. К. Рота (*1964*), а затем Р. Стэнли. Изучение ими частично упорядоченных множеств, свойств функции Мёбиуса, абстрактных свойств линейной зависимости, выявление их роли при решении комбинаторных задач способствовали обогащению комбинаторных методов исследования и дальнейшей интеграции комбинаторики в современную математику.

С задачами, в которых приходилось выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшее положение охотников во время охоты, воинов – во время битвы, инструменты – во время работы. По мере усложнения производственных и общественных отношений все шире приходилось пользоваться общими понятиями о порядке. Иерархии, группировании.

Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие в первую очередь, умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника. О таких играх английский поэт Уордсворт писал:

Не нужно нам владеть клинком,
Не ищем славы громкой.
Тот побеждает, кто знаком
С искусством мыслить, тонким.

Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т.д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных.

Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали сложные шрифты, а секретные службы других государств пытались эти шрифты разгадать. Стали применять шрифты, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв с использованием ключевых слов и т.д.

Задачи, в которых идет речь о тех или иных комбинациях объектов, называют *комбинаторными*. Понятие комбинаторной задачи не имеет строгого определения. Иногда говорят о комбинаторных задачах в достаточно узком смысле слова, имея в виду практические задачи, при решении которых возникают проблемы с большим (и часто неприемлемым) количеством операций (а, значит, и времени). Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой*. Слово «комбинаторика» происходит от латинского *слова combinare*, которое означает «соединять, сочетать». Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и других областях знаний [16, с.37].

В современном обществе с развитием вычислительной техники комбинаторика «добилась» новых успехов. Так, с помощью ЭВМ была решена комбинаторная задача, известная под названием «проблема четырех красок»: удалось доказать, что любую карту можно раскрасить в четыре цвета так, что никакие две страны, имеющие общую границу, не будут окрашены в один и тот же цвет [21, с.29].

1.2. Теория комбинаторных соединений

Рассмотрение комбинаторных задач геометрического содержания в школьном курсе математики, с нашей точки зрения целесообразно начинать с актуализации таких понятий как: комбинаторная задача, комбинаторика, кортеж, факториал; систематизации видов комбинаторных задач, видов соединений; рассмотрения способов подсчета количества соединений.

1.2.1. Виды комбинаторных соединений, способы подсчета их количества

Как было отмечено выше, под *комбинаторной задачей* будем понимать задачу, решение которой предполагает рассмотрение перебора различных вариантов решения.

В комбинаторных задачах всегда требуется найти число всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям, но в одних задачах подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, приходится считать различными, в других порядок следования элементов не важен, и подмножества, отличающиеся только расположением элементов, не считаются различными [2, с. 21].

В учебной литературе встречаются различные *виды задач*, которые на наш взгляд, относятся к классу комбинаторных, среди них:

– задачи на фигурные числа (квадратные, треугольные, пятиугольные и т.д.; прямоугольные и непрямоугольные и пр.);

– магические квадраты;

– латинские квадраты (Эйлеровы ортогональные и др.);

– задачи на взвешивание, переливание, разрезание;

– задания на составление и подсчет различных видов соединений и т.д.

В данном исследовании мы занимались рассмотрением заданий последнего вида – на соединения, решение которых подразумевает выполнение основных операций:

1) образование упорядоченных множеств, состоящее в установлении определенного порядка следования элементов множества друг за другом, составление *перестановок*;

2) образование подмножеств, состоящее в выделении из данного множества некоторой части его элементов – составление *сочетаний*;

3) образование упорядоченных подмножеств – составление *размещений*.

Таким образом, говоря о видах комбинаторных соединений, мы имеем в виду сочетания, размещения и перестановки двух основных классов – с повторениями и без повторений.

Некоторые авторы (например, Н.Я. Виленкин) при введении понятий сочетания, размещения и перестановки используют понятие «кортеж» (слово, *n*-мерный вектор).

Определение 1. Пусть дано некоторое множество X. Возьмем множество *n*-первых натуральных чисел $N_n=\{1,2,\ldots,n\}$ и зададим некоторое отображение множества N_n во множество X. Это значит, что числу 1 ставится в соответствие элемент x_1 Є X, числу 2 – элемент x_2 Є X, …, числу *n* элемент x_n Є X. В результате мы получаем набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов множества X, в который некоторые элементы могут входить несколько раз, ведь при отображении N_n в X может случиться, что различным числам отвечает один и тот же элемент множества X. Располагая элементы этого набора по порядку номеров, мы получаем *кортеж* ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) длины *n*, составленный из элементов множества X [2, с.23].

Различают несколько уровней решения комбинаторных задач. Начальным уровнем является поиск хотя бы одного расположения объектов, обладающего заданными свойствами (например, отыскание расположения десяти точек на пяти отрезках). Иногда удается доказать, что данная комбинаторная задача не имеет решения (например, нельзя расположить 10 шаров в 9 урнах так, чтобы в каждой урне было не более одного шара – хотя бы в одной из урн окажется не менее двух шаров). Если комбинаторная задача имеет несколько решений, то возникает вопрос о подсчете числа таких решений, об описании всех решений данной задачи. Подсчет количества соединений базируется на использовании понятия «факториал».

Определение 2. Факториал числа *n* (обозначается символом $n!$) – есть произведение всех натуральных чисел от *n* до 1: $n!=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2$.

Как правило, в учебной литературе оговаривается, что $0!=1; 1!=1; 2!=2$ и т.д. (см. таблицу 1).

Таблица 1

Значения $n!$ при $1 \le n \le 10$

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
n!	*1*	*2*	*6*	*24*	*120*	*720*	*5 040*	*40 320*	*362 880*	*3 628 800*

Так как виды соединений представляют определенный интерес для нашего исследования, остановимся подробнее на каждом из них.

1.2.2. Понятие размещения, подсчет количества размещений

Пусть имеется множество, содержащее n элементов.

Определение 3. Размещением из n элементов по k ($k \le n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов [16, с.44].

Из определения вытекает, что $0<k\le n$ и что размещения из n элементов по k элементов – это все k–элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Классическими заданиями, сводящимися к рассмотрению размещений, являются упражнения на составление чисел (из данного множества цифр), списков должностных обязанностей и другие.

Как правило, комбинаторные задачи не заканчиваются составлением соединений – размещений, а сводятся к подсчету числа всех размещений из n элементов по k. Такой подсчет может быть организован посредством упорядоченного перебора всевозможных комбинаций, а может быть осуществлен с помощью формулы.

Для обозначения числа размещений применяется специальный символ A_n^k (читается: «число размещений из n по k»), где A – первая буква французского слова *arrangement,* что означает «размещение, приведение в порядок».

Например, число размещений из *4* элементов по *3* элемента равно 24, т.е. $A_4^3 = 24$.

В общем случае, для вычисления количества размещений из n элементов по k элементов используется формула: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ (1.1), где

$0<k\le n$ (т.е. число размещений из n элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно).

Доказательство формулы (1.1)

1-й элемент подмножества можно выбрать n способами; 2-й элемент – уже только $(n-1)$ способом (т.к. в качестве второго элемента можно взять любой элемент множества, кроме уже выбранного первым). Каждый из способов выбора первого элемента может объединяться с каждым из способов выбора второго, и, следовательно, существует n $(n-1)$ способов выбора первых двух элементов при построении k – элементного упорядоченного подмножества (по правилу умножения). После выбора первых двух элементов остаются $(n-2)$ возможности для выбора третьего элемента, и каждая из этих возможностей может комбинироваться с любой из возможностей выбора первых двух элементов, т.е. выбор первых трех элементов может быть осуществлен $n(n-1)(n-2)$ способами.

Последний элемент k – элементного подмножества может быть выбран $(n-k+1)$ способом, так как к моменту выбора k–того элемента в исходном множестве останется $(n-(k-1))$ элемент. Таким образом, $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$. Ч.т.д.

С помощью понятия «факториал» формулу (1.1) удобно записать в другом виде. Умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы (1.1) на $(n-k)!$. Получаем: $A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$ или $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. [11, с.300].

Пример 1. Семь человек обмениваются различными книгами. Сколько подобных обменов возможно?

Решение

Различных способов обменов книгами очевидно столько, сколько существует двухэлементных последовательностей семиэлементного множества. Следовательно, число способов равно числу размещений из *7* элементов по *2*, т.е. равно A_7^2. По формуле подсчета количества размещений, полагая в ней n = *7*, k = *2*, находим $A_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = 7\cdot 6 = 42$ способов.

Ответ: 42 способа обмена.

Наряду с размещениями без повторений рассматриваются размещения с повторениями.

Определение 4. Множества $X_1, \dots, X_k$, из элементов которых составляются кортежи, могут иметь общие элементы. В частности, все они могут совпадать с одним и тем же множеством *X*, состоящим из *n* элементов. Кортежи длины *k*, составленные из элементов *n*- множества *X*, называют *размещениями с повторениями* из *n* элементов по *k*, а их число обозначают $\overline{A}_n^k$ [22, с.19].

Число размещений с повторениями из *n* элементов по *k* равно произведению *k* сомножителей, каждый из которых равен *n*: $\overline{A}_n^k = n^k$ (1.2).

Пример 2. На референдуме предложены четыре вопроса, на которые надо ответить «да» или «нет». Сколько есть возможностей заполнения бюллетеня (на все вопросы надо дать ответ)?

Решение

Получаем кортеж длины 4 (столько вопросов в бюллетене), каждый элемент может быть выбран двумя способами («да» или «нет»). Поэтому число различных возможностей равно $\overline{A}_4^2 = 2^4 = 16$

Ответ: 16 возможностей.

Частным случаем размещений являются перестановки. Однако, как правило, в учебной литературе их рассматривают в отдельно выделенных теоретических пунктах.

1.2.3. Понятие перестановки, подсчет количества перестановок

Пусть задано *n*–элементное множество *X* . Рассмотрим различные упорядочивания данного множества. Получаемые при этом упорядоченные множества отличаются друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Их называют *перестановками без повторений из n элементов*, а их число обозначают P_n .

Определение 5. Комбинации из n элементов, отличающихся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются *перестановками без повторений* из n элементов [25, с.25].

Например, из трех элементов множества $X = \{a, b, c\}$, можно составить шесть перестановок: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

В силу того, что перестановки представляют собой частный случай размещений, то формула для подсчета числа перестановок получается из формулы (1.1): перестановка без повторений из n элементов – то же самое, что размещение без повторений из n элементов по n. Поэтому для отыскания P_n достаточно положить в формуле (1.1) $m = n$. Получаем: [illegible] (2.1)

Итак, $P_n = n!$ [11, с.306].

Пример 3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$ при условии, что в числе цифры не повторяются.

Решение

Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ответ: 120 чисел.

Перестановки с повторениями. Кортежи (a, b, a, a, b) и (b, a, b, a, a) различны, но имеют один и тот же состав – в оба кортежа входят три буквы a и две буквы b. Уточним понятие состава кортежа. Пусть α – кортеж длины n, составленный из элементов m-множества X. Перенумеруем элементы множества X: $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Тогда каждому числу k, $1 \le k \le m$, соответствует число n_k, показывающее сколько раз элемент x_k встречается среди компонент кортежа α. Выписывая по порядку эти числа, получаем новый кортеж $(n_1, \ldots, n_m)$, который и называют *составом кортежа* α. Например, если $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а $\alpha = (x_1, x_3, x_1, x_4, x_3, x_1)$, то кортеж α имеет состав $(3, 0, 2, 1)$.

Два кортежа, имеющие один и тот же состав, могут отличаться друг от друга лишь порядком компонент. Их называют *перестановками с повторениями* данного состава. Решим следующую комбинаторную задачу:

Найти число перестановок с повторениями, имеющих состав (n_1, n_2, …, n_m).

Прежде чем решать эту задачу в общем виде, рассмотрим частный случай – найдем число перестановок с повторениями из букв *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*. Сначала перенумеруем эти буквы: a_1,a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2. Так как после нумерации все буквы стали различны (мы можем теперь отличить a_1 от a_3), то их можно составить *7*! перестановок, где *7 = 3 + 2 + 2*. Если стереть в каждой из этих перестановок значки при буквах, то получатся перестановки с повторениями из букв *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*. Например, из перестановки (a_1, b_1, c_2, a_3, b_2, a_2) получим (*a*, *b*, *c*, *c*, *a*, *b*, *a*).

При этом одна и та же перестановка с повторениями получается несколько раз. Например, перестановка с повторениями (*a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*) получается из всех перестановок букв a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, в которых на первых трех местах стоят буквы a_1, a_2, a_3 (в любом порядке), на четвертом и пятом месте – буквы b_1 и b_2 (в любом порядке), а шестое и седьмое место места занимают буквы c_1 и c_2. Но буквы a_1, a_2, a_3 можно переставлять *3*! способами, буквы b_1, b_2 – *2*! способами и буквы c_1, c_2 – *2*! способами. Поскольку эти способы можно произвольным образом комбинировать друг с другом, то получаем, что (*a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*) получается из *3*!·*2*!·*2*! перестановок букв a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2. Столькими же способами может получиться любая другая перестановка с повторениями букв *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*. Значит, число различных перестановок с повторениями в 3! · 2! · 2! раз меньше общего числа перестановок семи букв a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, т.е. равно $\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=21$.

Точно так же разбивается общий случай: количество $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ перестановок с повторениями, имеющих состав (n_1, n_2, …, n_m), выражается формулой:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_m)!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} \quad (2.2)$$ [2, с. 36].

Пример 4. Сколько различных анаграмм можно составить из слова «Миссисипи» (анаграмма – это слово, пусть даже не имеющее смысла, полученное из данного слова путем перестановок букв)?

Решение

Согласно формуле (2.2) буквы слова «Миссисипи» можно переставлять $\frac{9}{1431}=25$ способами.

Ответ: *2 520* способами.

Рассмотрим еще один вид соединений – сочетания (с повторениями и без), а также их свойства.

1.2.4. Понятие сочетания, подсчет количества сочетаний

Пусть имеется множество X, состоящее из n элементов.

Определение 6. Подмножества, содержащие k элементов из данных n элементов основного множества X, называются *сочетаниями из n элементов по k* [2, с.30].

Число сочетаний из n элементов по $к$ элементов обозначаются символом C_n^k. При выводе формулы подсчета C_n^k следует учитывать, что $0 \le k \le n$.

Известно, что число перестановок из n элементов равно $n!$. Предположим, что из данного множества составлены все подмножества по k элементов, число которых равно C_n^k. Возьмем одно такое подмножество, содержащее k элементов, тогда из оставшихся элементов данного множества выделится его подмножество, содержащее $(n – k)$ элементов. Осуществим все возможные перестановки как в одном, так и в другом подмножестве. Число этих перестановок соответственно равно $k!$ и $(n – k)!$. С помощью этих перестановок образуем перестановки, состоящие из n элементов, причем такие, что первые m мест занимают перестановки первого типа, а последние $(n – k)$ мест – перестановки второго типа. Число таких n – элементных перестановок равно $k!\,(n – k)!$, а всего таких перестановок можно получить в C_n^k раз больше. Ясно, что таким способом получены все возможные перестановки из n элементов (их число равно $n!$).

Имеем равенство $k!(n-k)!C_n^k = n!$, откуда $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (3.1)

Пример 5. Группа студентов, состоящая из *30* человек, выбирает трех делегатов на конференцию. Сколькими способами могут быть проведены эти выборы?

Решение

Заметим, что каждый способ выбора трех делегатов из *30* человек представляет собой сочетание из *30* элементов по *3*; число таких способов равно: $C_{30}^3 = \dfrac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$.

Ответ: *4 060* способов

Решение задач, связанных с комбинаторными соединениями, упрощает знание свойств сочетаний.

Свойство 1. Имеет место соотношение $C_n^k = C_n^{n-k}$

Доказательство

Вычислим C_n^{n-k} :

$C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$, т.е. равенство справедливо.

Свойство 2. Справедлива формула $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$

Доказательство

Вычислим сумму $C_{k-1}^n + C_{k-1}^{n-1}$:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Ч.т.д.

Свойство 3. Для любого целого числа $n \geq 0$ верно равенство

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$ [2, с.32].

Определение 7. Два кортежа называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковый состав.

Определение 8. Классы эквивалентности, на которые разбивается вся совокупность кортежей длины *k* из *n* элементов, называются сочетаниями с повторениями *n* элементов по *k*, их число обозначают $\overline{C}_n^k$.

Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k вычисляется по формуле: $\overline{C}_n^k=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$ [23, с.22].

Рассмотрим пример демонстрирующий применение данного вида соединения.

Пример 6. В кондитерском отделе продаются пирожные четырех сортов: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить семь пирожных?

Решение

Здесь рассматриваются сочетания с повторениями из 4 (четыре вида пирожных) по 7 (столько пирожных покупают). Значит,

$$\overline{C}_4^7=\frac{(4+7-1)!}{(4-1)!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

Ответ: 120 способов.

Изучив виды комбинаторных задач и виды соединений, рассмотрим способы подсчета количества соединений, предлагаемые авторами различных учебно-методических пособий.

1.2.5. Способы подсчета количества соединений, основные правила комбинаторики

На основе анализа содержания современных учебников по математике 5–9 классов, было установлено, что изучение комбинаторных соединений начинается не с введения формул (сочетаний, размещений, перестановок) и их применения к решению комбинаторных задач, а с развития навыков перебора (Ю.Н. Макарычев, Н.Я. Виленкин, А.Г. Мордкович, Г.В. Дорофеев и И.Ф. Шарыгин, С И. Никольский и др.).

Рассмотрим *способы решения комбинаторных задач*, базирующиеся на идее упорядоченного перебора, а именно – решение задач с помощью графов, таблицы и дерева перебора вариантов и др.

1) *Таблица вариантов*

Для решения комбинаторных задач существуют различные средства, исключающие возможность «потери» какой-либо комбинации элементов. Для подсчета числа комбинаций из двух элементов таким средством является *таблица вариантов.*

Пример 7. Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры: 1, 2 и 3. Подсчитать их количество N.

Решение

Для подсчета образующихся чисел составим таблицу:

1-я цифра	2-я цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9$.

Ответ: $N = 9$.

Для решения задач, аналогичных примеру 7, необязательно каждый раз составлять таблицу вариантов. Можно пользоваться правилом, получившим название «Правило произведения».

Правило произведения. Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранным первым и вторым элементами.

Пример 8. Катя и Оля приходят в магазин, где продают в любом количестве плитки шоколада трех видов. Каждая девочка покупает по одной плитке. Сколько существует способов покупки?

Решение

Катя может купить плитку любого из трех видов шоколада ($n = 3$). Оля может поступить аналогично ($m = 3$). Пару шоколадок для Кати и Оли можно составить $n \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$ различными способами.

Ответ: 9 способами.

Правило сложения. Пусть даны m – действий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такие что выполнение любого из них не зависит от выполнения остальных. Действие A_1 можно выполнить $к_1$ – способом, A_2 – $к_2$ – способом, ………, A_n – $к_n$ – способом, тогда действие состоящее в том, что выполняется любое из выше перечисленных действий, можно выполнить $\kappa_1+\kappa_2+\ldots\ldots+\kappa_n$ – способами [2, с.21].

Обычно правило сложение связано с правилом умножения.

2) Подсчет вариантов с помощью графов

Перебрать и подсчитать всевозможные комбинации из данных элементов несложно, когда их количество невелико.

Нередко подсчет вариантов облегчают *графы*. Так называют геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют *вершинами*) и соединяющих их отрезков (называемых *ребрами* графа). При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества (предметов, людей, числовых и буквенных кодов и т. п), а с помощью ребер – определенные связи между этими элементами. Для удобства иллюстрации условия задачи с помощью графа его вершины-точки могут быть заменены, например, кругами или прямоугольниками, а ребра-отрезки – любыми линиями.

Пример 9. Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Решение

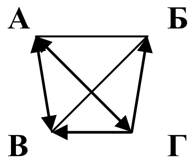


Рис. 1

Решим задачу с помощью так называемого *полного графа* с четырьмя вершинами А, Б, В, Г (рис. 11), обозначенными по первым буквам имен каждого из 4 мальчиков. В *полном графе проводятся все возможные ребра*. В данном случае отрезки-ребра обозначают шахматные партии, сыгранные каждой парой мальчиков. Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и партий было сыграно 6.

Ответ: 6 партий.

Рассмотрим пример решенный с помощью графа, называемого *деревом* (за внешнее сходство с деревом).

Пример 10. Антон, Борис и Василий купили 3 билета на футбольный матч на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся три места?

Решение

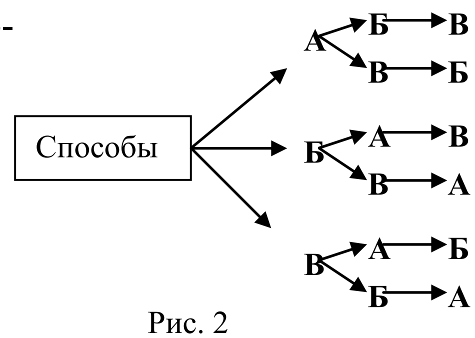


Рис. 2

На 1-е место может сесть любой из троих друзей, на 2-е – любой из двоих оставшихся, а на 3-е – последний (рис. 2). Сказанное изобразим с помощью дерева, помещая в вершины графа первые буквы имен друзей А, Б и В. Получаем упорядоченные тройки друзей: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА. Итого: 6 способов.

Ответ: 6 способов.

Ребра графа, являются деревом, иногда называют ветвями дерева, а само дерево – *деревом вариантов*. Вычерчивать дерево полезно, когда требуется записать все существующие комбинации элементов.

Дерево вариантов дает наглядное представление о том, как применяется *правило произведения* для подсчета комбинаций из большего, чем 2, числа элементов. Действительно, например, в задаче 15, согласно правилу произведения, первое место может занять 3 способами. Второе место – 2 способами, третье – 1 способом, т.е. существует $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов.

Приведенные выше способы решения комбинаторных задач предлагает М.В. Ткачева [25, с.15], Ш. Цыганов [26, с.25] предлагает несколько иные способы (см. способы 4–7).

4) Способ составления «корзинок»

Пример 11. В меню столовой имеется 4 первых, 5 вторых и 6 третьих блюд. Сколькими способами можно выбрать обед из одного первого, одного второго и одного третьего блюда?

Решение

Представим, что у нас есть разнос с углублениями для большой тарелки, тарелки поменьше и стакана. Эти три углубления мы будем называть корзинками. Число способов заполнить первую корзинку равно 4, вторую – 5, третью – 6. Общее число способов равно произведению $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$. В этом и состоит правило произведения.

Пример 12. Сколько натуральных чисел является трехзначными?

Решение

Вспомним, как учат первоклассников читать и считать. Для этого. Среди прочего, используется планшет с кармашками, в которые вставляются карточки с цифрами и буквами. Ясно, что кармашки – это аналог корзинок. Когда мы записываем трехзначное число, используем три кармашка. Первый кармашек соответствует числу сотен, второй – числу десятков. Третий – числу единиц.

В первый кармашек мы можем поместить карточку, на которой написано число «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8» или «9». Таким образом, у нас есть 9 способов сделать это. Во второй кармашек можно поместить одну из десяти карточек «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9» или «0», т.е. 10 способами. В третий кармашек можно также поставить одну из 10 карточек 10 способами.

По правилу произведения общее число трехзначных натуральных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Ответ: 900 способов.

Заполнение корзинок. Несмотря на кажущуюся простоту метода, есть при его использовании пара «подводных камушков», которые необходимо знать и помнить.

Камушек 1. Порядок заполнения корзинок-кармашков может быть произвольным. Выбирайте простейший.

Пример 13. Сколько есть шестизначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых цифр, а вторая и четвертая цифры нечетны?

Решение

Ясно, что надо взять 6 кармашков. Попробуем заполнить их так, как мы это делали раньше (см. пример 12). В первый кармашек – одну из 9 цифр (любую, кроме «0»), а сколько способов поставить цифру во второй кармашек? Это зависит от того, что уже стоит на первом месте. Например, если на первое место мы поставили «2», то на второе место можно поставить «1», «3», «5», «7» или «9». Если же на первом месте уже стоит «9», то на второе место можно поставить только «1», «3», «5» или «7».

Поэтому выберем такой порядок заполнения кармашков: второй, четвертый, первый, третий, пятый, шестой. Во второй кармашек можно поместить любую из 5 нечетных цифр, в четвертый – любую из 4 оставшихся нечетных, в первую – одну из 7 (любую, кроме «0» и тех двух, что уже стоят), в третий – любую из 7 оставшихся, в пятый – любую из 6 оставшихся, в шестой – любую из 5 оставшихся. Всего $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 29\,400$ чисел с заданными свойствами.

Ответ: 29 400 чисел.

Камушек 2. не обязательно на одной карточке может быть записана одна цифра или, более общее, один элемент.

Пример 14. Сколько есть девятизначных чисел, в которых каждая цифра встречается по одному разу, а цифра 0 следует непосредственно за цифрой 1?

Решение

Рассмотрим девять карточек: «10», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9», и расставим их в девять кармашков. Это можно сделать $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=$ 362 880 способами.

Ответ: 362 880 способов.

Кармашки и карточки. Давайте обсудим вопрос: что нужно брать в качестве кармашков, а что – карточек?

Вопрос может несколько удивить. Казалось бы, разряды числа – это кармашки, в которые вставляются карточки с цифрами. А как может быть иначе? Разберем следующий пример.

Пример 15. Сколько есть четырехзначных чисел, в записи которых две цифры 1 и по одной цифре 2, 3?

Решение

Решим пример двумя способами. *Первый способ*. Возьмем четыре кармашка, которые назовем «тысячи», «сотни», «десятки», «единицы», и возьмем четыре карточки, на которых напишем «1_1», «1_2», «2» и «3».

Как обычно, будем вставлять карточки в кармашки, например, если карточку «1_1» вставить в первый карман, карточку «1_2» во второй, «2» - в третий, «3» - в четвертый, получим число 1123.

Ясно, что в первый кармашек можно поместить одну из 4 карточек, во второй – одну из 3, в третий – одну из 2, в четвертый – последнюю карточку. Всего $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа.

Однако последовательность карточек «1_2», «1_1», «2», «3» задает число 1123, которое мы уже записали выше. Т.е., из 24 чисел с заданным свойством, которые мы получили, каждое встречается дважды. Соответственно, разных чисел – 12.

Второй способ. Ясно. Что цифру 2 можно поставить в любой из 4 разрядов числа 4 способами, цифру 3 – в любой из оставшихся разрядов тремя способами, две цифры 1 – единственным образом на два оставшихся места. Разберем подробнее, то что мы сделали.

По существу, мы взяли четыре карточки, на которые написали «тысячи», «сотни», «десятки», «единицы», и взяли три кармашка, на которых написали «1», «2», «3». В первый кармашек будем вкладывать две карточки, в остальные – по одной. Например, если в первый кармашек положить карточки «тысячи» и «сотни», во второй – «десятки», в третий – «единицы», то получим число 1123.

В кармашек «2»можно поместить любую из 4 карточек, в кармашек «3» - любую из 3 оставшихся, в кармашек «1» единственным способом помещаем пару оставшихся карточек. Общее число способов – $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$.

Ответ: 12 способов.

Камушек 3. В качестве кармашков лучше выбирать те, среди которых нет одинаковых.

5) Способ подсчета ненужных вариантов

В некоторых случаях для того, чтобы найти число элементов конечного множества, обладающих требуемым свойством, удобно найти сначала число элементов, не обладающих этим свойством, и затем вычесть это число из общего числа элементов множества.

Пример 16. Найти количество трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна единица.

Решение

Количество трехзначных чисел можно найти следующим образом: первую цифру можно выбрать девятью способами (нуль исключаем), вторую и третью цифру можно выбрать 10 способами. По правилу умножения получаем: $9 \cdot 10 \cdot 10=900$ трехзначных чисел.

Теперь найдем, сколько из них не содержат не одной *1*: на первое место можно поставить любую из 9 цифр, на второе – любую из 9 цифр и на третье –

любую из *9* цифр (цифры могут повторяться, и каждый раз исключаем *1*). Всего по правилу умножения будет $9 \cdot 9 \cdot 9=729$ вариантов. А теперь из общего количества комбинаций вычтем те, которые не содержат не одной *1*: $900 - 729 =171$ чисел.

Ответ: 171 – столько трехзначных чисел содержат хотя бы одну 1.

6) Способ подсчета частями

В некоторых случаях при подсчете числа предметов, обладающих требуемыми свойствами, не удается непосредственно применить правило произведения, однако удается разбить множество пересчитываемых предметов на несколько частей таким образом, что для подсчета числа элементов в каждой из этих частей уже можно применить правило произведения. После этого остается сложить получившиеся числа.

Пример 17. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей, чтобы они не били друг друга?

Решение

Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако число способов поставить черного короля зависит от того, где стоит белый.

Если белый король стоит на одном из 4 угловых полей, то он бьет 4 поля, и черного короля можно поставить на одно из 60 оставшихся.

Если белый король стоит на краю доски, но не на одном из 4 угловых полей (таких полей – 24), то он бьет 6 полей, и черного короля можно поставить на одно из 58 оставшихся.

Если белый король стоит не на краю доски (таких полей – 36), то он бьет 9 полей, и черного короля можно поставить на одно из 55 оставшихся.

Всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов.

Ответ: 3612 способов.

Все выше перечисленные шесть способов решения комбинаторных задач можно отнести к одному методу – *непосредственный подсчет количества комбинаторных соединений*.

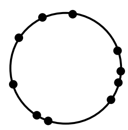
Существует еще один метод решения комбинаторных задач – *опосредованный подсчет количества комбинаторных соединений*. Данный метод основан на применении формул комбинаторики при решении задач (а именно, применение формул сочетания, размещения и перестановок). С понятиями сочетания, размещения и перестановки, а также с формулами их нахождения мы познакомились выше (см. пункт 1.2.2 – 1.2.4).

1.3. Виды и примеры комбинаторных задач геометрического содержания

Среди множества задач комбинаторики на подсчет количества соединений можно выделить задания арифметического, алгебраического характера, а так же задачи геометрического содержания.

Под *комбинаторными задачами геометрического содержания* в данной работе мы пониманием – комбинаторные задачи, решение которых предполагает оперирование геометрическими понятиями (точка, фигура и т.д.). Среди таких задач встречаются задания на подсчет диагоналей многоугольника, числа точек пересечения нескольких прямых или окружностей, количества отрезков и т.д.

Пример 18. На окружности отмечено *10* точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?



Решение

Осуществим решение непосредственным пересчетом вариантов.

1) первую точку можно выбрать *10* способами;

2) после выбора первой точки выбираем вторую: чтобы ломанная не стала самопересекающейся, вторую точку можно выбрать двумя способами;

3) после выбора первой и второй точек выбираем третью: чтобы ломанная не стала самопересекающейся, третью точку можно выбрать двумя способами;

– и т.д. по аналогии каждую из следующих точек можно выбрать двумя способами, так как она должна быть соседней с одной из ранее выбранных точек (иначе получится самопересекающаяся ломаная);

9) последнюю точку выбираем из двух оставшихся – двумя способами.

Произведенный подсчет содержит в себе число, в два раза большее фактического количества ломанных, поскольку начало и конец при таком подсчете не различаются, вследствие этого делим результат на *2*. Следовательно, всего имеется $\frac{10\cdot 2^{8}}{2}=1280$ ломаных.

Ответ: *1 280* ломаных.

Примером комбинаторной задачи геометрического содержания на доказательство.

Пример 19. Докажите, что число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке, равно C_n^4.

В данной задаче целесообразно осуществить краткую запись формулировки.

Дано:

$A_1A_2A_3A_4A_5\ldots A_n$ – выпуклый n-угольник, где $n \geq 4$;

Никакие три из диагоналей n-угольника не пересекаются в одной точке;

Точки пересечения диагоналей

Доказать: число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника.

Доказательство

Взяв любые четыре вершины многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5\ldots A_n$, сформируем тем самым некоторый четырехугольник, например, $A_1A_2A_3A_4$, в котором две диагонали образуют одну точку пересечения (рис. 3).

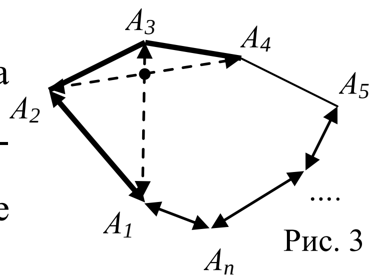


Рис. 3

Так как условием задачи определено, что никакие диагонали n-угольника не пересекаются в одной точке, то любая точка пересечения диагоналей однозначно определяется выбором четверки вершин.

Отметим, что, так как порядок вершин роли не играет, формируем сочетания из n точек по четыре. Итак, число таких четверок, а тем самым и точек пересечения диагоналей равно C_n^4. Ч.т.д.

Осуществив анализ учебно-методической литературы (В.В. Прасолов, Н.Я. Виленкин, В.Н. Студенецкая и др.) мы пришли к выводу, что комбинаторные задачи геометрического содержания можно типизировать исходя из требований:

1) задачи на вычисление количества соединений;

2) задачи на доказательство.

Для решения комбинаторных задач геометрического содержания, как и других заданий комбинаторики можно выделить два способа решения:

1) непосредственный перебор (построение дерева возможных вариантов, таблицы вариантов, графов и пр.);

2) опосредованный подсчет количества вариантов (задачи, решаемые с помощью формул).

Приведем пример комбинаторной задачи геометрического содержания на вычисление, решение которой сводится к применению формулы.

Пример 20. На прямой отмечено *8* точек, на параллельной ей прямой – *11* точек. Сколько существует: *а*) треугольников с вершинами в этих точках; *б*) четырехугольников с вершинами в этих точках.

Решение

а) Чтобы построить треугольник нужны три точки. На одной прямой их *8*, на другой – *11*. Начнем соединять точки с прямой, состоящей из *8* точек – на этой прямой берем одну точку, а на прямой состоящей из *11* точек – *2* точки, тогда число возможных вариантов будет равно $8 \cdot C_{11}^{2}$.

Если начинаем строить треугольники с прямой из *11* точек, то их количество равно $11 \cdot C_{8}^{2}$. Число всех треугольников $8C_{11}^{2}+11\cdot C_{8}^{2}=748$;

б) Чтобы построить четырехугольник берем по две точки на каждой прямой. Общее число четырехугольников: $C_{8}^{2}\cdot C_{11}^{2}=28\cdot 55=1540$.

Ответ: *а*) *748*; *б*) *1 540*

Приведем пример комбинаторной задачи геометрического содержания на сравнение, проводимое посредством предварительного вычисления.

Пример 21. На окружности отмечено несколько точек, *А* – одна из них. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих точку *А* или не содержащих её?

Решение

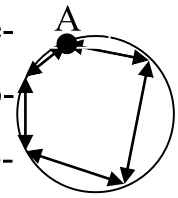


Рис. 4

Отметим, что решение данной задачи можно осуществлять конкретно-индуктивным способом, начиная с перебора трех, четырех, пяти точек и т.д., затем выявляя определенную закономерность. Однако с нашей точки зрения, учащихся можно стимулировать к проведению общих рассуждений (реализуя абстрактно-дедуктивный способ). Для этого целесообразно задавать следующие наводящие вопросы.

– Как из n–угольника, не содержащего точку A можно получить многоугольник, содержащий точку A?

Ответ: добавлением точки A.

– Какие ограничения в этом случае накладываются на n?

Ответ: $n \geq 3$ (так как первыми многоугольниками, не содержащими точку A, к которым она будет добавляться, являются треугольники).

– Как из n–угольника, содержащего точку A можно получить многоугольник, не содержащий точку A?

Ответ: отбрасыванием точки A.

– Какие ограничения в этом случае накладываются на n?

Ответ: $n \geq 4$ ($n \neq 3$, так как от треугольника не сможем отбросить точку).

– Каких n–угольников больше – содержащих или не содержащих точку A?

Ответ: многоугольников, содержащих точку A, больше, чем многоугольников, не содержащих точку A (причем больше на число треугольников с вершиной A).

Таким образом, рассмотрев комбинаторные задачи геометрического содержания, у нас возник вопрос – встречается ли данный вид комбинаторных задач в школьном курсе математики.

4. Анализ учебников и учебно-методической литературы

Анализ программно-методических материалов школьного курса математики, позволил сделать вывод относительно содержания учебного материала по теме «Комбинаторика».

В программы для школ (классов) с углубленным изучением математики включен следующий учебный материал.

8 – 9 классы. Множества и элементы комбинаторики. Комбинаторный принцип умножения. Число элементов прямого произведения двух множеств. Число подмножеств конечного множества. Число k–элементных подмножеств конечного множества из n – элементов(число сочетаний). Число перестановок.

10 – 11 классы. Метод математической индукции. Комбинаторные принципы сложения и умножения. Основные формулы комбинаторики. Размещения, сочетания и перестановки (без повторения и с повторениями).

Согласно примерной программе по математике в содержание основной школы, включено изучение следующих тем.

Сбор и регистрация данных. Таблицы и диаграммы, их использование для представления информации в повседневной жизни. Статистические характеристики систем данных. Задача подсчета вариантов. Систематический перебор. Дерево вариантов. Правило произведения. Перестановки. Формула числа перестановок. В силу того, что изучение комбинаторики в настоящее время является обязательным для изучения, мы задались целью изучить – в каком объеме оно включено в школьные учебники. Для удобства результаты анализа оформлены в виде таблице (см. табл. 2).

Таблица 2

Анализ содержания учебного материала по теме «Комбинаторика» в школьных учебниках

критерии	Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. Алгебра. Элементы статистики и теории вероятностей	А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. События. Вероятности. Статистическая обработка данных	М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. Элементы статистики и вероятность
1.Способы решения комбинаторных задач	а) перебор возможных вариантов; б) построение дерева возможных вариантов; в) правило умножения (Пусть имеется n элементов и требуется выбрать один за другим некоторые k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать из оставшихся элементов n_2 способами, затем третий элемент – n_3 способами и т.д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$).	а) перебор возможных вариантов; б) построение дерева возможных вариантов; в) правило умножения (Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого произведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B).	а) построение таблиц вариантов; б) подсчет вариантов с помощью графов; в) правило умножения (если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами). г) построение граф дерева.
2.Перестановки	Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке (обозначают P_n) $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$ Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: $n!$	Произведение первых подряд идущих n натуральных чисел обозначают $n!$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$ Теорема. Элементам множества, состоящего из n различных элементов, можно присвоить номера от 1 до n ровно $n!$ различными способами. Каждый способ нумерации от 1 до n, о котором идет речь в теореме, часто называют перестановкой данного n – элементного множества. Обозначение: P_n. Значит, приведенную теорему можно записать в виде формулы:	Комбинации из n элементов; отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются перестановками из n элементов. Обозначают P_n. С помощью правила произведения можно обосновать, что $P_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$ После применения переместительного закона умножения эту формулу можно переписать в виде $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$ (1) Для сокращения записи произведения первых n натуральных чисел в матема-

		$P_n = n!$.	тике используется символ $n!$ (читается: «Эн факториал»), т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, поэтому формулу (1) часто записывают в виде $P_n = n!$
3.Сочетания	Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов. Обозначают: C_n^k. Читают: «C из n по k». Допустим, что имеется множество, содержащее n элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по k элементов. Число таких сочетаний равно C_n^k. В каждом таком сочетании можно выполнить P_k перестановок. В результате мы получим все размещения, которые можно составить из n элементов по k. Их число равно A_n^k. Значит, $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$. Мы получили формулу: $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$ Формулу числа сочетаний можно записать в другом виде. Умножим числитель	Теорема 1 (о выборках двух элементов). Если множество состоит из n элементов, то у него имеется $\frac{n(n-1)}{2}$ подмножеств, состоящих из двух элементов. Теорема 2 (о выборках трех элементов). Если множество состоит из n элементов, то у него имеется $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ подмножеств, состоящих из трех элементов. Число всех выборок двух элементов из n данных без учета порядка обозначают C_n^2 и называют числом сочетаний из n элементов по 2. Число всех выборок k элементов из n данных без учета порядка обозначают C_n^k и называют числом сочетаний из n элементов по k. Теорема 3. для числа сочетаний n элементов по k справедлива формула	

	и знаменатель дроби на $(n-k)!$, где $n \neq k$. Получим: $$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))(n-k)!}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k\cdot(n-k)!}$$ Очевидно, что в числителе дроби записано произведение всех натуральных чисел от n до 1, взятых в порядке убывания, т.е. числитель дроби равен $n!$. Получаем формулу: $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot$$	$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot$$ (др. формулировка: если множество состоит из n элементов, то у него имеется $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ подмножеств, состоящих из k элементов. $$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n;$$ $$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{1}{0!}$$ $0! = 1$, $C_n^n = 1$, $$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$ $$C_n^k = C_n^{n-k},$$ $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$	
4.Размещения	Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов. $$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)).$$ Мы получили формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k. Число размещений из n по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, из которых наибольшим является n. Заметим, что размещения из n элементов по n отличаются друг от друга только порядком элементов, т.е. представляют собой перестановки из n элементов. В этом случае по формуле числа размещений получаем, что		

	$A_n^n = n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))$, т.е. $A_n^n = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\,(n-1)\,n$.		
5.Типы задач	Задачи на обозначение точек буквами латинского алфавита; подсчет точек на плоскости.	Задачи на подсчет диагоналей многоугольника (1 задача)	Задачи на перечисление геометрических фигур; обозначение вершин многоугольника.
6.Примеры комбинаторных задач геометрического содержания	Задача 9.49 (стр. 46). На плоскости отметили 5 точек. Их надо обозначить латинскими буквам. Сколькими способами это можно сделать (в латинском алфавите 26 букв)? Задача 9.129 (стр. 66). На плоскости отметили несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки провели прямую. Сколько точек было отмечено, если всего было проведено 23 прямых?	Задача 25 (стр. 19). На плоскости даны 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Три точки покрасил в рыжий цвет, а остальные – в черный. а) Сколько можно провести отрезков с разноцветными концами? б) Сколько можно провести отрезков с рыжими концами? в) Составьте таблицу из двух строк. В первой строке запишите количество рыжих точек из 10 данных (от 0 до 10), во второй – число отрезков с разноцветными концами при таком способе раскраски. г) 5 точек покрасили в серый цвет, 2 точки – в бурый и 3 – в малиновый цвет. Сколько можно построить серо- буро-малиновых треугольников? Задача 2 (стр. 34). В правильном 17-угольнике провели все диагонали. а) Сколько всего получилось отрезков? б) Сколько имеется сторон? в) Сколько провели диагоналей? г) Сколько всего диагоналей в выпуклом n-угольнике?	Задача Ф-1-2. Перечислить знакомые виды: 1) четырехугольников; 2) треугольников. Задача 3 (стр. 28). Сколькими способами можно с помощью букв *K, L, M, N* обозначить вершины четырехугольника?

Основные понятия и формулы комбинаторики встречаются также в учебнике Ю.Н. Макарычева и др. (Алгебра 9 кл.) для класса с углубленным изучением математики. В этом учебнике предлагается краткий обзор и формул по темам: перестановки, размещения и сочетания. Приводится вывод формул для нахождения сочетаний, размещений и перестановок. Встречаются комбинаторные задачи геометрического содержания на подсчет диагоналей многоугольника (1 задача), на нахождение количества проведенных прямых на плоскости (1 задача).

Вывод: задачный материал в учебниках однообразен, типовые задачи заимствуются друг у друга. И, по сути, времени не так много, чтобы оценить все многообразие комбинаторных задач, в том числе комбинаторных задач геометрического содержания. Поэтому необходимо продумать – как же можно интересные, разнообразные задачи геометрического содержания (обеспечивающие еще и межпредметные связи) включить в содержание школьного курса математики. Т.е. в следующей главе будет предложен курс по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания», который на наш взгляд позволит внести весомый вклад и разрешение данных проблем.

2. Разработка курса по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания»

В данной главе предлагается разработка курса по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания», рассмотрены: цель курса, объем и виды учебной деятельности; методические рекомендации по организации курса; описано содержание занятий курса; представлено содержание вводного и итогового контроля знаний и умений учащихся.

2.1. Пояснительная записка

Несмотря на то, что действия с соединениями включаются в содержание школьной программы они явно недостаточно и трудно воспринимаются учащимися, следовательно, необходимы дополнительные занятия для лучшего усвоения материала.

Курс по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания» разработан для учащихся 9 (1 полугодие) классов. На дополнительных занятиях учащиеся смогут овладеть навыками решения комбинаторных задач геометрического содержания, увидеть практическую необходимость решения комбинаторных задач геометрического содержания. Полученные знания помогут учащимся решать геометрические задачи.

Целесообразность введения данного курса состоит в том, что содержание курса, форма его организации помогут школьнику через практические занятия оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы и предоставят ему возможность работать на уровне повышенных возможностей. Курс по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания» позитивно влияет на мотивацию по предметам естественно-математического цикла.

Задания, предлагаемые программой данного курса, способствуют развитию навыков рационального мышления, способности прогнозирования результатов деятельности.

Курс по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания» разработан с использованием элементов комбинаторики, которые применяются как для решения собственно математических задач, так и задач прикладного характера.

Проведение курса по выбору предусматривает достижение триединой образовательной цели.

Цель обучения: формирование понятия комбинаторной задачи геометрического содержания, специальных навыков и умений решения этих задач.

Цель развития: развитие комбинаторного мышления учащихся.

Цель воспитания: воспитание личности в процессе освоения математики и математической деятельности, развитие у школьников самостоятельности и способности к самоорганизации.

Проведение курса рассчитано на 10 часов, из которых 8 – классно-урочных занятий и 2 часа самостоятельной работы учащихся.

К каждому занятию курса нами разработаны методические рекомендации.

Критерии оценки успешности прохождения курса

Для того чтобы оценить динамику усвоения учащимися материала, а так же поставить перед учащимися необходимость регулярно заниматься. Важно, с точки зрения психологии, своевременно предоставить подростку достаточно объективную информацию об уровне его знаний и умений, об ожидающей его оценки. В связи с этим мы ориентируемся на следующие критерии, которые, с нашей точки зрения, помогут учителю и ученику оценить успешность прохождения данного курса:

1) по мере прохождения программы для организации самоконтроля своей деятельности в каждый последующий раздел включены самостоятельные части, выполнение которых обязательно и предполагает овладение материалом, изложенным ранее. Таким образом, если возникают затруднения при выполнении того или иного задания, учащимся необходимо вернуться и вновь проработать ранее изложенные вопросы;

2) объем заданий варьируется по усмотрению учителя в зависимости от уровня подготовленности школьников;

3) на подготовительном этапе предлагается провести входную диагностику, определяющую объективную оценку возможностей учащихся оценку.

Критерии при выставлении оценок могут быть следующие.

Оценка «отлично» (5) – учащийся демонстрирует сознательное и ответственное отношение, сопровождающееся ярко выраженным интересом к учению; учащийся освоил теоретический материал курса, получил навыки в его применении при решении конкретных задач; в работе над индивидуальными домашними заданиями учащийся продемонстрировал умение работать самостоятельно.

Оценка «хорошо» (4) – учащийся освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартными заданиями; выполняет домашние задания прилежно (без проявления ярких творческих способностей); наблюдаются определенные положительные результаты, свидетельствующие об интеллектуальном росте и о возрастании общих умений учащегося.

Оценка «удовлетворительно» (3) – учащийся освоил наиболее простые идеи и методы курса, что позволило ему достаточно успешно выполнять простые задания.

2.2. Основное содержание курса

В результате изучения курса учащиеся имеют возможность овладеть следующими представлениями и умениями:

а) представлениями о способах решения комбинаторных задач геометрического содержания;

б) умениями анализировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать;

в) умениями самостоятельно работать с учебной и методической математической литературой.

1. Проверка знаний (входная диагностика) (1 час). Проверочная работа.

2. Решение комбинаторных задач на нахождение сочетаний, размещений и перестановок (1 час).

Рассматриваются примеры комбинаторных задач, устраняются пробелы в знаниях по решению основных задач: а) нахождение числа перестановок; б) нахождение числа размещений; в) нахождение числа сочетаний. Актуализировать знания учащихся по теме «Элементы комбинаторики». Метод обучения: беседа, объяснение. Форма контроля: проверка самостоятельно решенных задач, самостоятельная работа.

3. Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление, решаемые непосредственным перебором (1 час).

Показ широты применения элементов комбинаторики при решении задач геометрического содержания. Решение комбинаторных задач геометрического содержания. Выполнение тренировочных упражнений. Форма занятий: объяснение, практическая работа. Метод обучения: выполнение тренировочных задач. Формы контроля: проверка самостоятельно решенных задач.

4. Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление, решаемые опосредованно (2 часа).

Решение комбинаторных задач геометрического содержания, решаемых с помощью формул комбинаторики. Актуализировать знание формул комбинаторики. Форма занятий: комбинированные занятия. Метод обучения: рассказ, объяснение, выполнение практических заданий. Формы контроля: проверка самостоятельно решенных задач.

5. Решение комбинаторных задач геометрического содержания на непосредственное доказательство (1 час).

Решение комбинаторных задач геометрического содержания на доказательство, используя непосредственный способ доказательства. Форма занятий: объяснение, практическая работа. Метод обучения: выполнение тренировочных задач.

6. Решение комбинаторных задач геометрического содержания (3 часа).

Решение комбинаторных задач геометрического содержания различными способами. Форма занятий: практическая работа. Метод обучение: выполнение тренировочных заданий.

7. Проверь себя! (1 час). Выполнение итоговой проверочной работы (выходная диагностика).

Таблица 3

Учебно-тематический план курса по выбору

<table>
<tr><th>Кол-во часов</th><th>Тема занятия</th><th>Тип занятия</th><th>Деятельность учащихся</th><th>Деятельность учителя</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Проверка знаний (входная диагностика)</td><td>Занятие проверки и коррекции знаний и умений</td><td>выполняют проверочную работу</td><td>организует контроль</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Решение комбинаторных задач на нахождение сочетаний, размещений и перестановок.</td><td>Занятие обобщения и систематизации</td><td rowspan="6">Работают с информацией, выполняют необходимые задания, фиксируют результаты, осуществляют самоконтроль и корректировку своей учебной деятельности. Выполняют самостоятельную часть работы.</td><td rowspan="6">Организует, контролирует и направляет работу учащихся.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление решаемых непосредственным перебором</td><td>Занятие ознакомления с новым материалом</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление решаемых опосредованно</td><td>Занятие ознакомления с новым материалом</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Решение комбинаторных задач геометрического содержания на непосредственное доказательство</td><td>Занятие ознакомления с новым материалом</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Решение комбинаторных задач геометрического содержания</td><td>Урок обобщения и систематизации</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Проверь себя!</td><td>Урок проверки и коррекции знаний и умений</td><td>выполняют проверочную работу</td><td>организует контроль</td></tr>
</table>

Организация и проведение аттестации учеников

Целью аттестации является определение соответствия достигнутого учащимися результата ожидаемым.

Задания итоговой проверочной работы включает в себя задания из каждого раздела (элементы комбинаторики, комбинаторные задачи геометрического содержания и их способы решения).

Ожидаемые результаты

Знать:

– определение понятий: факториал; перестановок; размещений; сочетаний;

– способы решения комбинаторных задач геометрического содержания: непосредственный перебор (построение дерева возможных вариантов; таблицы вариантов, графов и пр.); опосредованный подсчет количества вариантов (решение задач с использованием формул).

Уметь:

– распознавать вид комбинаторного соединения при решении задач;

– решать комбинаторные задачи геометрического содержания.

Иметь опыт работы направленный на формирование познавательных, информационных и коммуникативных компетенции: понимать и интерпретировать текст; получать информацию и использовать ее для достижения целей и собственного развития; действовать по алгоритму, а так же составлять алгоритм.

Контроль знаний и умений

Для осуществления проверки и оценки знаний, умений и навыков учащихся, полученных в результате изучения материала курса по выбору «Комбинаторные задачи с геометрическим содержанием», используются следующие формы и виды контроля (см. табл. 4).

Таблица 4

Формы и виды контроля

№ урока	Тема	Контроль	
		Вид	Форма
1	Проверка знаний (входная диагностика)	текущий	фронтальный

			(проверочная работа)
2	Решение комбинаторных задач на нахождение сочетаний, размещений и перестановок	текущий	Индивидуальный
3	Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление решаемых непосредственным перебором	текущий	Индивидуальный
4,5	Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление решаемых опосредованно	текущий	индивидуальный, групповой
6	Решение комбинаторных задач геометрического содержания на непосредственное доказательство	текущий	индивидуальный
7-9	Решение комбинаторных задач геометрического содержания	текущий	Индивидуальный
10	Проверь себя! (выходная диагностика)	тематический	Индивидуальный

В следующем параграфе предложены методические рекомендации по проведению курса по выбору, а также примерные планы занятий.

2.3. Методическая часть

Курс по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания» задает примерный объем знаний, умений и навыков, которым должны овладеть школьники. В этот объем, безусловно, входят те знания, умения и навыки, обязательное приобретение которых всеми учащимися предусмотрено требованиями программы общеобразовательной школы: однако предполагается более высокое качество их сформированности. Учащиеся должны научиться решать задачи более высокой, по сравнению с обязательным уровнем, сложности, овладеть рядом технических и интеллектуальных умений на уровне их свободного использования. Следует отметить, что требования к знаниям и умениям ни в коем случае не должны быть завышены. Чрезмерность требований порождает перегрузку и ведет и ведет к угасанию интереса. Одна из целей преподавания данного курса - ориентационная – помочь осознать ученику степень значимости своего интереса к математике и оценить свои возможности, поэтому интерес и склонность учащегося к занятиям на курсах должны всемерно подкрепляться и развиваться.

Вводя учащихся в тематику занятий курса, следует отметить, что использование свойств комбинаторики позволяет решать довольно сложные задачи. На уроках можно использовать фронтальный опрос, который охватывает большую часть учащихся класса. Эта форма работы развивает точную, лаконичную речь, способность работать в быстром темпе, быстро собираться с мыслями и принимать решения.

Можно рекомендовать комментированные упражнения, когда один из учеников объясняет вслух ход выполнения задания. Эта форма помогает учителю «опережать» возможные ошибки. При этом нет механического списывания с доски, а имеет место процесс повторения. Сильному ученику комментирование не мешает, среднему придает уверенность, а слабому помогает. Ученики приучаются к вниманию, сосредоточенности в работе, к быстрой ориентации в материале.

Поурочные домашние задания являются обязательными для всех. Активным учащимся можно давать задания из дополнительной части. Данный курс содержит дидактический материал, как для учителя, так и для учащихся, а также приводятся возможные варианты организации деятельности учащихся.

Для успешного анализа и самоанализа необходимо определить критерии оценки деятельности учащихся, они должны быть известны и родителям.

Планы занятий курса по выбору

Занятие № 1. Проверка знаний.

Тип занятия: урок проверки и оценки знаний

Цель: осуществить диагностику уровня знаний, умений и навыков учащихся по теме «Основные понятия и формулы комбинаторики».

На занятии проверяется:

– знание основных формул (сочетаний, размещений, перестановок);

– умение осуществлять перебор вариантов с помощью дерева вариантов и таблицы переборов, распознавать вид комбинаторного соединения;

– владение навыками решения простейших (типовых) комбинаторных задач.

Оборудование: бланки с заданиями проверочной работы.

Методы: репродуктивный, объяснительно – иллюстративный.

Содержание занятия

Учитель приветствует учащихся, освещает цели урока, настраивает на предстоящую работу. Объясняет, что учащимся предстоит посещать занятия, на которых необходимо использовать материал, изученный ими на протяжении 5-9 классов. Поэтому важно проверить – нет ли пробелов в знаниях, а в случае если таковые имеются, постараться ликвидировать их на следующем занятии. После этого учащиеся приступают к выполнению заданий проверочной работы.

Проверочная работа № 1

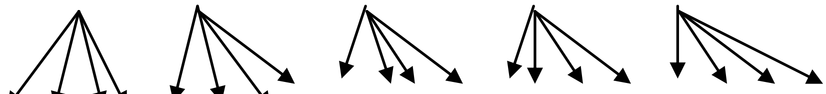
Задание 1. В правление фирмы входят пять человек. Из своего состава правления должно выбрать президента и вице – президента. С помощью дерева вариантов продемонстрируйте – сколькими способами это можно сделать?

*Решение***.** Президентом фирмы можно выбрать одного из 5 человек:

Президент: 1   2   3   4   5

После того как президент избран, вице – президентом можно выбрать любого из 4 оставшихся членов правления:

Президент: 1   2   3   4   5



2 3 4 5   1 3 4 5   1 2 4 5   1 2 3 5   1 2 3 4

Значит, выбрать президента можно пятью способами, и для каждого выбранного президента четырьмя способами можно выбрать вице - президента. Следовательно, общее число способов выбрать президента и вице - президента фирмы равно: $5 \cdot 4 = 20$.

Задание 2. Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры: 1, 2 и 3 (продемонстрировать подсчет с помощью таблицы переборов).

Решение. Для подсчета образующихся чисел составим таблицу:

1-я цифра	*2-я цифра*		
	1	*2*	*3*
1	*11*	*12*	*13*

2	*21*	*22*	*23*
3	*31*	*32*	*33*

При решении данных задач у учащихся выявляются следующие знания и умения: умение строить дерево возможных вариантов, уметь проводить анализ задачи.

Задание 3. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделены *6* учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурств, если каждый учащийся дежурит один раз? (Выберите правильный ответ)

а) *844*; *б*) *523*; *в*) *720*; *г*) *635*

Задание 4. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей? (Выберите правильный ответ)

а) *10*; *б*) *15*; *в*) *20*; *г*) *30*

Задание 5. В седьмом классе изучается *14* предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков? (Выберите правильный ответ)

а) *240240*; *б*) *230230*; *в*) *220220*; *г*) *300300*

Таблица 5

Бланк правильных ответов

Задание	*3*	*4*	*5*
Ответ	*в)*	*а)*	*а)*

По окончании выполнения проверочной работы, можно организовать взаимопроверку по образцу, для чего учащиеся обмениваются работами и, прислушиваясь к комментариям учителя, вникают в нюансы решений. Решение первой и второй задач для наглядности можно продемонстрировать на доске.

Проверив, работы учащихся учитель, делает вывод – готовы ли они к восприятию курса по выбору «Комбинаторные задачи геометрического содержания». Те учащиеся, которые выполнили работу хорошо, могут приступать к изучению основного содержания курса по выбору с занятия № 3. С учащимися, которые не справились с заданиями проверочной работы, рекомендуется провести подготовительную работу на занятии № 2. По окончании выполнения проверочной работы, целесообразно проинформировать учащихся о домашнем задании. В качестве задания на дом можно предложить следующее.

Домашнее задание. Составить кроссворд по распознаванию известных понятий и терминов комбинаторики, изученных ранее.

Занятие № 2. Решение комбинаторных задач на нахождение сочетаний, размещений и перестановок.

Тип: занятие по систематизации и обобщению изученного материала.

Цель: актуализировать знания учащихся по теме «Основные понятия и формулы комбинаторики».

На занятии повторяются:

– знание основных формул (сочетаний, размещений, перестановок);

– умение осуществлять перебор вариантов с помощью дерева вариантов и таблицы переборов, распознавать вид комбинаторного соединения;

– владение навыками решения простейших (типовых) комбинаторных задач.

Метод: репродуктивный, объяснительно-иллюстративный.

Содержание занятия

Учитель напоминает, что комбинаторные задачи – это задачи, решение которых предполагает рассмотрение перебора различных вариантов решений. Комбинаторные задачи можно разделить на несколько групп: задачи на переливание; задачи на взвешивание; и т.д., а также задачи на соединения. В свою очередь задачи на соединения делятся на сочетания и размещения, размещения делятся на перестановки и не перестановки.

Акцентируется внимание учащихся на том, что на данном занятии будет вспоминаться ряд немаловажных фактов, среди которых: множество, подмножество, последовательность, определения соединений (сочетаний, размещений и перестановок) и их формулы.

В ходе объяснения, учитель напоминает, что в математике часто приходится рассматривать те или иные группы объектов как единое целое: натуральные числа, целые числа, треугольники, квадраты и т.д. Все эти различные совокупности называются множествами. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A.

Фрагмент конспекта учащегося:	*Множества* содержат объекты. *Например:* числа, фигуры и т.д. Множество *А* называют *подмножеством множества В,* если каждый элемент множества А принадлежит и множеству В. *Например.* Пусть А – множество всех четных чисел, а Z – множество всех целых чисел. Тогда А есть подмножество Z.

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки.*

Рассмотрим *пример*. Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами a, b и c. Эти книги можно расставит на полке по-разному. Если первой поставить книгу a, то возможны такие расположения книг: abc, acb. Если первой поставить книгу b, то возможными являются такие расположения: bac, bca. И наконец, если первой поставить книгу c, то получим такие расположения: cab, cba. Каждое из этих расположений называют *перестановкой* из трех элементов.

Фрагмент конспекта учащегося:	*Перестановка из n элементов – это любое расположение всех этих элементов в определенном порядке*

Целесообразнее сначала напомнить факториал учащимся понятие, а затем переходить к перестановкам.

Фрагмент конспекта учащегося:	*Факториал:* $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$ $0!=1$

После актуализации знаний о понятии «факториал», учащимся можно предложить заполнить таблицу значений факториалов до десяти (можно заполнить таблицу частично на занятии, а частично – дома).

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
n!	*1*	*2*	*6*	*24*	*120*	*720*	*5 040*	*40 320*	*362 880*	*3 628 800*

Итак, формула нахождения перестановок: $P_n = n!$.

В рассматриваемом примере мы установили, что $P_3 = 6$.

Для того чтобы найти число перестановок из трех элементов, можно не выписывать эти перестановки, а воспользоваться правилом умножения. Будем рассуждать так. На первое место можно поставить любой из трех элементов. Для каждого выбора первого элемента есть две возможности выбора второго из оставшихся двух элементов. Наконец, для каждого выбора первых двух элементов остается единственная возможность выбора третьего элемента. Значит, число перестановок из трех элементов равно $3 \cdot 2 \cdot 1$, т.е. 6.

Вывод формулы перестановок можно предложить учащимся для самостоятельного выполнения (порекомендовав соответствующую литературу).

Упражнения для работы на уроке

Задача 1. Сколькими способами могут быть расставлены *8* участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение (учащиеся вместе с учителем обговаривают решение задачи, вычисления учащиеся проводят самостоятельно). Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что:

$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$, значит, существует 40 320 способов расстановки участниц забега на восьми беговых дорожках.

Ответ: 40 320 способов.

Задача 2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Решение (решение оформляется на доске). Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно P_3. Значит, искомое число четырехзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно $P_4 – P_3$.

Получаем: $P_4 – P_3 = 4! – 3! = 24 – 6 = 18$.

Ответ: 18 чисел.

Учитель акцентирует внимание на том, что перестановки – это не единственный известный вид комбинаторных соединений. Следующий вид – размещения, продемонстрировать суть которых лучше на конкретном примере.

Пусть имеется *4* шара и *3* пустых ячейки. Обозначим шары буквами *a, b, c, d.* В пустые ячейки можно по-разному разместить три шара из этого набора шаров. Если мы поместим шар *a* в первую ячейку, шар *b* во вторую ячейку, а шар *c* в третью ячейку, то получим одну из возможных упорядоченных троек шаров:

a	*b*	*c*

Выбирая по-разному первый, второй и третий шары, будем получать различные упорядоченные тройки шаров, например:

a	*c*	*b*
b	*a*	*c*
d	*c*	*b*

Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из четырех элементов, называют *размещением* из четырех элементов по три.

Фрагмент конспекта учащегося*:*	*Размещение* из n элементов по k ($k \le n$) – подмножество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов. A_n^k – число размещений

Учитель отмечает, что из определения следует, что два размещения из n элементов по k считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.

Учащимся предлагается следующее упражнение для выполнения.

Составим из элементов *a, b, c, d* все размещения по три элемента. Выпишем сначала те размещения, которые начинаются с элемента *a*. Получим: *abc, abd, acd, adb, adc.* Аналогично можно составить размещения, которые начинаются с элемента *b*, с элемента *c*, с элемента *d*. В результате получим:

abc,, abd, acb, acd, adb, adc,

bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,

cab, cad, cba, cbd, cda, cdb,

dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Из составленного видно, что A_4^3 = 24. Число размещений из четырех элементов по три можно найти, не выписывая самих размещений. Зная формулу нахождения числа размещений, находим:

[illegible].

Итак, A_n^k **= *n* (*n* – 1)(*n* – 2) · … · (*n* – (*k* – 1)).**

Мы получили формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k.

Число размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, из которых наибольшим является n.

Заметим, что размещения из n элементов по n отличаются друг от друга только порядком элементов, т.е. представляют собой перестановки из n элементов.

В этом случае по формуле числа размещений получаем, что

$$A_n^n = \boldsymbol{n\,(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot\,(n-(k-1))}, \textbf{ т.е.}$$

$$A_n^n = \mathbf{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot}\boldsymbol{(n-2)\,(n-1)\,n}.$$

Мы пришли к уже известной нам формуле числа перестановок $P_n = n!$.

Рассмотрим примеры.

Задача 3. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

Решение (сначала самостоятельная работа, затем проговариваю ответ). Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо предметами, либо порядком следования предметов. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 8 элементов по 4. Имеем:

$A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$.

Ответ: расписание можно составить 1680 способами.

Задача 4. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из четырех человек для участия в эстафете на 100 + 200 + 400 + 800 (м). Сколькими способами это можно сделать?

Решение (учащиеся решают задачу самостоятельно)

Один бегун на один отрезок дистанции, значит $A_{30}^4 = 657\,720$.

Ответ: 657 720 способами.

Задача 5. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы *A, B, C, D, E, F*?

Решение. Ни один элемент не может входить дважды. Значит, $A_5^3 = 60$.

Ответ: 60 способами.

Пусть имеются пять гвоздик разного цвета. Обозначим их буквами *a, b, c, d, e.* Требуется составить букет из трех гвоздик. Выясним, какие букеты могут быть составлены.

Если в букет входит гвоздика *a*, то можно составить такие букеты: *abc, abd, ade, acd, ace, ade.*

Если в букет не входит гвоздика *a*, но входит гвоздика *b*, то можно получить такие букеты: *bcd, bce, bde.*

Наконец, если в букет не входят ни гвоздика *a*, ни гвоздика *b*, то возможен только один вариант составления букета: *cde.*

Мы указали все возможные способы составления букетов, в которых по - разному сочетаются три гвоздики из данных пяти. Говорят, что мы составили все возможные *сочетания* из 5 элементов по 3.

Сочетанием из *n* элементов по *k* называется любое множество, составленное из *k* элементов, выбранных из данных *n* элементов.

В отличии от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из *n* элементов по *k* отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из *n* элементов по *k* обозначают C_n^k (читают «*C* из *n* по *k*»).

Фрагмент конспекта учащегося:	*Сочетанием* из *n* по *k* называется любое множество, составленное из *k* элементов, взятых из *n* элементов. C_n^k - число сочетаний.

В рассмотренном примере, составим все сочетания из 5 элементов по 3, мы нашли, что C_5^3 = 10.

Выведем формулу числа сочетаний из *n* элементов по *k*, где $k \le n$. Для этого сначала выясним, как C_5^3 выражается через A_5^3 и P_3.

Мы нашли, что из 5 элементов *a, b, c, d, e* можно составить следующие сочетания по 3 элемента: *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.*

В каждом сочетании выполним все перестановки. Число таких перестановок равно P_3. В результате получим все возможные комбинации из 5 элементов по 3, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов, т.е. все размещения из 5 элементов по 3. Всего мы получили A_5^3 размещений.

Значит, $C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3$

Отсюда $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{P_3}$.

Аналогично будем рассуждать в общем случае. Допустим, что имеется множество, содержащее *n* элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по *k* элементов. Число таких сочетаний равно C_n^k. В каждом сочетании можно выполнить P_k перестановок. В результате мы получим все размещения, которые можно составить из *n* элементов по *k*. Их число равно A_n^k.

Значит, $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

Отсюда $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Мы получили формулу: $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$.

Формулу числа сочетаний можно записать в другом виде. Умножим числитель и знаменатель дроби на $(n-k)!$, где $n \neq k$. Получим:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)!}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(n-k)!}.$$

Очевидно, что в числителе дроби записано произведение всех натуральных чисел от *n* до 1, взятых в порядке убывания, т.е. числитель дроби равен $n!$.

Получаем формулу: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Заметим, что эту формулу можно использовать и в случае, когда $n = k$, если принять по определению, что $0! = 1$.

Упражнения для работы на уроке

Задача 6. Вычислите: C_5^3; C_3^5.

Решение (один ученик вызывается к доске). $C_5^3 = 10$; C_3^5 – вычислить нельзя, так как $m < n$.

Задача 7. Сколькими способами в игре «Спортлото» можно выбрать шесть номеров из 49?

Решение (разбившись на группы по 4 человека, учащиеся решают задачу самостоятельно, ответ сверяется). Одно число может быть по правилам игры выбрано не более одного раза, из 49 по 6.

$C_{49}^6 = 13\,983\,816$ способами.

Задача 8. У Робина – Бобина Барабека 40 соседей. Он решил пригласить двоих из них на обед. Сколько у него способов это сделать?

Решение (разбившись на группы по 4 человека, учащиеся решают задачу самостоятельно, ответ сверяется). C_{40}^{2} = 780.

Задача 9. Участники лотереи покупали билеты, на которых было указано пять чисел от 1 до 90. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержащего шары с числами от 1 до 90, вынимали пять шаров. Выигрывали те, у которых одно или и более чисел были на билетах среди вынутых. Какова часть «счастливых» билетов с одним числом, при котором игроки получают минимальный выигрыш?

Решение (один ученик вызывается к доске).

Купленный билет выглядит:

1	25	19		

Например, в день лотереи вытаскивают шары с числами 2, 45, 19, 17, 63. Среди них 1 номер совпал с номером на билете (№ 19). Этот номер находится в C_{89}^{4} билетах. Всего билетов выпущено C_{90}^{5}. Отсюда следует, что часть «счастливых» билетов равна $\frac{¿C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}}$ = $\frac{1}{18}$. Общее число исходов находится из формулы сочетаний: $C_{90}^{5} = \frac{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$; $C_{89}^{4} = \frac{89\cdot88\cdot87\cdot86}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$.

Ответ: $\frac{C_{1}^{1}C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}} = \frac{1}{18}$.

Домашнее задание. Решить задачи № 10, № 13, № 15 (см. приложение 4, дидактические материалы для учащихся).

Занятие № 3 . Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление решаемых непосредственным перебором.

Тип урока: комбинированный урок

Цель: учить решать комбинаторные задачи геометрического содержания на вычисление непосредственным перебором; формирование у учащихся самостоятельности; работа над формированием таких мыслительных операций, как: сравнение, анализ, обобщение, аналогия.

Методы: объяснительно – иллюстративный; частично – поисковый.

Оборудование: карточки с самостоятельной работой.

Содержание занятия

В начале урока учитель проверяет домашнее задание (собирает на проверку кроссворды).

Рекомендуется провести небольшую проверочную работу (3 задачи), тем самым проверим устранены ли пробелы в знаниях учащихся при решении комбинаторных задач.

Самостоятельная работа

Задача 1. Сколькими способами можно расставить на 32 черных полях шахматной доски 12 белых и 12 черных чашек?

Решение

Поля для белых чашек можно выбрать C_{32}^{12} способами. После этого остается 20 полей, из которых можно C_{20}^{12} способами выбрать поля для черных чашек. Всего получаем $C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$ способа.

При решении задачи у учащихся выявляются следующие знания и умения: знание формулы нахождения числа сочетаний, умение применять данные знания к решению задач.

Задача 2. Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций, если: а) Олег должен находиться в конце ряда; б) Олег должен находиться в начале ряда, а Игорь – в конце ряда; в) Олег и Игорь должны стоять рядом.

Решение

а) Так как место Олега фиксировано, то число комбинаций зависит от расположения шести остальных мальчиков. Значит, число комбинаций равно $P_6 = 720$; б) Так как места Олега и Игоря фиксированы, то число комбинаций зависит от расположения пяти остальных мальчиков, т.е. $P_5 = 120$; в) будем рассматривать пару Олег – Игорь как один элемент. Расположение этой пары и пяти остальных мальчиков может быть выполнено $P_6 = 6!$ способами. В каждой из этих комбинаций Олег и Игорь могут располагаться $P_2 = 2!$ способами. Значит, искомое число способов равно $P_6 \cdot P_2 = 6! \cdot 2! = 1440$.

При решении этой задачи у учащихся выявляются следующие знания и умения: знание формулы нахождения перестановок, умение решать задачи на нахождение перестановок.

Задача 3. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в каждом из которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля?

Решение

В задаче речь идет о размещении из 10 элементов по 7 A_{10}^{7}, но надо исключить те, которые начинаются с цифры 0. Имеем: $A_{10}^{7} - A_{9}^{6} = 544$.

При решении этой задачи у учащихся выявляются следующие знания и умения: знание формулы нахождения размещений, применение формулы к решению задач.

Итак, на занятиях курса мы с вами будем учиться решать комбинаторные задачи геометрического содержания. Что значит геометрического содержания? Это например, задачи на подсчет диагоналей многоугольника, числа точек пересечения нескольких прямых или окружностей. Для решения комбинаторных задач геометрического содержания, как и других заданий комбинаторики, можно выделить два способа решения:

1) непосредственный перебор (например, построение дерева возможных вариантов, таблицы вариантов и др.);

2) опосредованный подсчет количества вариантов (задачи решаемые с помощью формул комбинаторики).

Сегодня мы с вами будем решать комбинаторные задачи геометрического содержания решаемые непосредственным перебором. Рассмотрим пример.

Задача 1. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых не самопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках? Решение (см. приложение 3, задача 3)

Ответ: 1280 ломаных.

Упражнения для работы на уроке

Задача 2. Сколькими способами можно обозначить вершины четырехугольника, используя буквы *A, B, C, D*?

(Решение ученика проводится самостоятельно, ответ сверяется).

Задача 3. В выпуклом n – угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали, причем никакие из них не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.

Решение (один ученик вызывается к доске). Прежде чем, приступить к решению задачи необходимо вспомнить определение выпуклого многоугольника - многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. См. приложение 4, задача 4.

Домашнее задание. Составить комбинаторную задачу геометрического содержания на вычисление решаемую непосредственным перебором, решить её.

Одному ученику дается индивидуальное задание подготовить устный опрос по теме «Основные понятия и формулы комбинаторики».

Занятия № 4 – 5. Решение комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление решаемые опосредованно.

Тип урока: урок ознакомления с новым материалом.

Цель: учить решать комбинаторные задачи геометрическим содержанием, применяя формулы комбинаторики; формирование у учащихся положительных мотивов учебной деятельности, привитие познавательного интереса, желания учиться; формирование и развитие умственных действий распознавания.

Содержание занятий

На предыдущем уроке один из учащихся получает задание провести устный опрос в классе. Для этого ему нужно составить группу вопросов по предложенному учителем перечню, заранее показать учителю. Во время проведения опроса оценивается как учащийся который проводит опрос, так и те учащиеся, которые отвечают на задаваемые вопросы.

В процессе решения комбинаторных задач геометрического содержания на вычисление, решаемые опосредованно будем придерживаться следующей схемой описания решения:

1) основное множество, т.е. набор основных элементов и чему равно n;

2) подмножество (соединение), чему равно m;

3) выяснять важен ли порядок расположения элементов в соединении?

Задача 1. На плоскости дано n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Найдите число прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно.

Решение

1)Основное множество: $A=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, n точек;

Вопрос учителя: сколько точек достаточно для построения прямой?

Ответ учащихся: через любые две точки можно построить прямую.

2)Подмножество: две точки, например, $B=\{4, 5\}$;

3)Важен ли порядок?

$\{4, 5\}=\{5, 4\}$, порядок не важен → подмножество →сочетание из n по два, т.е. C_n^2.

Ответ: C_n^2.

Упражнения для работы на уроке

Задача 1. На плоскости дано n точек, из которых m лежат на одной прямой, а из остальных никакие три точки не лежат на одной прямой. Найдите число треугольников, которые можно получить, соединяя эти точки по три.

(Один ученик вызывается к доске).

Решение

1) Основное множество: n точек;

2) Подмножество: три точки $\{A, B, C\} = \{C, A, B\}$, порядок не важен, следовательно подмножество, следовательно сочетание: C_n^3 – всего треугольников;

3)В условии задачи сказано, что только m точек лежат на одной прямой, а из оставшихся никакие три не лежат на одной прямой, значит, из общего числа треугольников, нужно отнять число сочетаний из m по три, т.е. C_m^3.

Ответ: $C_n^3 - C_m^3$.

Задача 2. На плоскости даны три точки. Проведем через одну из них m прямых, через другую n прямых и через третью p прямых. Положив, что в числе этих прямых не находится трех, пересекающихся в одной точке, и двух, параллельных между собой. Найдите число треугольников, образованных пересечением проведенных прямых.

(Один ученик вызывается к доске). Решение (см. приложение 3, задача 12).

Задача 3. На окружности последовательно отмечены точки A_1, A_2, …, A_{12}. Найдите:

а) число хорд с концами в отмеченных точках;

б) число треугольников с вершинами в отмеченных точках;

в) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках;

г) число треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой A_2A_8;

д) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой A_1A_5.

(Задание под буквами а) и б) выполнить у доски, вызывая по одному из учеников; остальные задания учащиеся выполняют самостоятельно, затем – ответы сверяются). Решение см. приложение 4.

Ответ: а) 66; б) 220; в) 495; г) 20; д) 460.

Задача 5. На прямой отмечено 8 точек, на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует

а) треугольников с вершинами в этих точках;

б) четырехугольников с вершинами в этих точках.

Рекомендуется повторить с учащимися определения таких геометрических фигур как треугольник и четырехугольник.

Самостоятельная работа, ответы сверяются. Решение см. приложение 4.

Ответ: а) 748; в) 1540.

Дополнительные задачи см. приложение 4.

Домашнее задание. Составить комбинаторные задачи геометрического содержания, решаемые опосредованно.

Занятие № 6. Решение комбинаторных задач на непосредственное доказательство.

Тип урока: урок ознакомления с новым материалом.

Цель: учить решать комбинаторные задачи геометрического содержания на непосредственное доказательство; формирование у учащихся самостоятельности; работа над формированием таких мыслительных операций, как: сравнение, анализ, синтез и обобщение.

Содержание занятия

Познакомимся еще с одним способом решения комбинаторных задач геометрического содержания – непосредственное доказательство, прежде чем начнем знакомство с новым видом комбинаторных задач геометрического содержания, рассмотрим *задачу 1*. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее $\frac{C_n^5}{n-4}$ различных выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

Решение см. приложение 3, задача 7.

Задача 2. Докажите, что число неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника равно ближайшему к $\frac{n^2}{12}$ целому числу.

Доказательство

Пусть всего имеется N неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника, причем из них N_1 правильных, N_2 неправильных равнобедренных и N_3 разносторонних. Каждый правильный треугольник равен одному треугольнику с фиксированной вершиной A, неправильный равнобедренный – трем треугольникам с вершиной A, а разносторонний – шести. Так как всего имеется $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ треугольников с вершиной A, то

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = N_1 + 3N_2 + 6N_3.$$

Ясно, что число неравных правильных треугольников равно 0 или 1, а число неравных равнобедренных равно $\frac{n-1}{2}$ или $\frac{n}{2}-1$, т.е. $N_1 = 1 - c$, $N_1 + N_2 = \frac{(n-2+d)}{2}$, где c и d равны 0 или 1. Поэтому

[illegible]

Так как $|3d-4c|<6$, то N совпадает с ближайшим к $\frac{n^2}{12}$ целым числом. Ч.т.д.

Домашнее задание. Составить комбинаторную задачу геометрического содержания на доказательство.

Занятия № 7 – 9. Решение комбинаторных задач геометрического содержания.

Тип урока: урок обобщения и систематизации.

Цель: актуализировать и систематизировать знания учащихся по теме: «Решение комбинаторных задач геометрического содержания»; формирование у учащихся самостоятельности, творческой активности, инициативы как устойчивых качеств личности.

Методы: репродуктивный, частично – поисковый.

Содержание занятий

Учащимся раздаются кроссворды, которые они составляли самостоятельно (выполненные учащимися) – 20 мин.

На занятии рекомендуется решать с учащимися различные комбинаторные задачи геометрического содержания *(условие задач см. приложение 4).*

Домашнее задание. Подготовить к контрольной работе, решать комбинаторные задачи и комбинаторные задачи геометрического содержания, повторить основные понятия и формулы комбинаторики.

Занятие № 10. Проверь себя!

Тип занятия: урок проверки и оценки знаний.

Цель: осуществить диагностику уровня знаний, умений и навыков учащихся по теме «Основные понятия и формулы комбинаторики, решение комбинаторных задач геометрического содержания».

На занятии проверяется:

– знание основных формул (сочетаний, размещений, перестановок);

– умение осуществлять перебор вариантов с помощью дерева вариантов и таблицы переборов, распознавать вид комбинаторного соединения;

– владение навыками решения простейших (типовых) комбинаторных задач, комбинаторных задач геометрического содержания.

Оборудование: бланки с заданиями проверочной работы.

Методы: репродуктивный, объяснительно - иллюстративный.

Содержание занятия

Учитель приветствует учащихся, освещает цели урока, настраивает на предстоящую работу. Проверочная работа предлагается в двух вариантах. После этого учащиеся приступают к выполнению работы, некоторые задания представлены в тестовой форме (см. прил. 2). Задания работы направлены на проверку знаний основных понятий и формул комбинаторики, а также на умение распознавания типов комбинаторных соединений при решении комбинаторных задач.

Библиографический список

1. Абрамович, М.И. Математика (алгебра и элементарные функции)[Текст]/ М.И. Абрамович, М.Т. Стародубцев. – М.: Изд-во Высшая школа, 1976. – 356 с.

2. Виленкин, Н.Я. Индукция. Комбинаторика [Текст] / Н.Я. Виленкин. –М.: Просвещение, 1976. – 280с.

3. Математика: Учебник для 5 кл. общеобразовательных учреждений / М 34 Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбург. – 16-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2005. – 280 с: ил. – ISBN 5 – 346 – 00480 – 7.

4. Математика: Учебник для 6 кл. общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбург. – 16-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2005. – 288 с: ил.

5. Математика: Учеб. Для 5 кл. общеобразовательных учреждений / М 34 Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др.; Под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина. – М.: Просвещение, 1998. – 368с.: ил. – ISBN 5-09-008059-3.

6. Математика: Учеб. Для 6 кл. общеобразовательных учреждений / М 34 Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др.; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина. – М.: Просвещение, 1995. – 416с.: ил.

7. Проблемы учебного процесса в инновационных школах [Текст] / под. ред. О.В. Кузьмина. – 8-е изд., Иркутск: Изд-во ИГПУ, 2003. – 194 с.

8. Курс математики для техникумов [Текст] / под. ред. Н.И. Матвеева, М.: Изд-во Наука, 1976. – 406 с.

9. Математика: Учеб. для 6 кл. общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович – 3-е изд., дораб. и испр. – М.: Мнемозина, 2004. – 264 с.: - ISBN 5-346-003940.

10. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии [Текст] / В.В. Прасолов. Часть 2. – М.: Наука, 1991. – 185 с.

11. Пособие по математики для поступающих в вузы / под. ред. Г.Н. Яковлева. – М.: Наука, 1988. – 450 с.

12. Васильев, Н.Б. задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

13. Я иду на урок математики: 5 класс: Книга для учителя / под. ред. И.Л. Соловейчик. – М.: Изд-во первое сентября, 199. – 352 с.: ил.

14. Математические олимпиады младших школьников / под. ред. В.И. Русанова. – М.: Просвещение, 1990. – 77 с.: ил. – ISBN 5-09-002882-6.

15. Макарычев, Ю.Н. Элементы комбинаторики в школьном курсе алгебры [Текст] / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк // математика в школе. – 2002. - № 7. – с. 59-64.

16. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей. Учебное пособие для учащихся 7 – 9 классов общеобразовательных учреждений [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; Под ред. С.А. Теляковского. – М.: просвещение, 2003. – 78 с.: ил. – ISBN 5 – 09 – 011415 – 3.

17. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 кл.: Учеб. Для шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Ю. Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков. – 3-е изд. – М.: Мнемозина, 2004. – 439 с.: ил. – ISBN 5-346-00404-1.

18. Мордкович, А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Доп. Параграфы к курсу алгебры 7 – 9 классов общеобразовательных учреждений. – 2-е изд. [Текст]/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2004. – 112 с.: ил. - ISBN 5 – 7107 – 4048 – 9.

19. Подлесская, И. Логика [Текст] / И. Подлесская // Математика. – 2004. - № 14. – с. 9-10.

20. Программно – методические материалы: Математика, 5 – 11 классы.: Сборник нормативных документов / Сост. Г.М. Кузнецова – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2001. – 320с.

21. Семеновых, А. Комбинаторика [Текст] / А. Семеновых // Математика. – 2004. - № 15. – с. 28-32.

22. Семеновых, А. Комбинаторика [Текст] / А. Семеновых // Математика. – 2004. - № 16. – с. 19-22.

23. Семеновых, А. Комбинаторика [Текст] / А. Семеновых // Математика. – 2004. - № 17. – с. 22-27.

24. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7 – 9 классы. / авт. – сост. В.Н. Студенецкая. Изд. 2-е, испр. – Волгоград: Учитель, 2006. – 428 с. - ISBN 5 – 7057 – 0623 – 5.

25. Ткачева, М.В. Элементы статистики и вероятность: учеб. пособие для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений / М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2005. – 112 с.: ил. - ISBN 5 – 09 – 013957 – 1.

26. Цыганов, Ш. Комбинаторика от А до Я [Текст] / Ш. Цыганов // Математика. – 2001. - № 25. – с. 25 – 28.

27. Цыганов, Ш. Комбинаторика от А до Я [Текст] / Ш. Цыганов // Математика. – 2001. - № 27. – с. 15 – 18.

Приложение 1

Входная диагностика

Проверочная работа № 1

Построй дерево возможных вариантов

Задача 1. В правление формы входят пять человек. Из своего состава правления должно выбрать президента и вице – президента. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 2. Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры: 1, 2 и 3.

Выбери правильный ответ

Задача 3. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделены 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурств, если каждый учащийся дежурит один раз?

а) 844; б) 523; в) 720; г) 635.

Задача 4. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

а) 10; б) 15; в) 20; г) 30.

Задача 5. В седьмом классе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

а) 240240; б) 230230; в) 220220; г) 300300.

Приложение 2

Выходная диагностика

Проверочная работа № 2. Вариант 1

Продолжить

1. Перестановкой из *n* – элементов некоторого *n* - элементного множества называется …

2. Сочетанием из *n* элементов по *k* …

3. Размещением из *n* по *k* называется …

Напиши формулу

4. A_n^k =

5. C_n^k =

6. P_n =

Выбери правильный ответ

7. Вычислите: $\overline{A}_5^3$.

а) 125; **б)** 152; **в)** 251.

8. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*?

а) 120; **б)** 60; **в)** 250.

9. Сколькими способами можно переставлять друг с другом цифры 1, 2, 3 и 4?

а) 46; **б)** 50; **в)** 24.

10. Сколькими способами можно распределить две одинаковые путевки между пятью лицами?

а) 20; **б)** 10; **в)** 15.

Реши задачу

11. На окружности отмечено 8 точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизначных ломаных с вершинами в этих точках?

12. В выпуклом *n*- угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали. На сколько частей они делят n- угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

15. Через каждую из трех данных точек проведем по m прямых так, чтобы из них не было двух, параллельных между собой, и трех, встречающихся в одной точке. Найдите число точек пересечения проведенных прямых.

Проверочная работа № 2. Вариант 1

Продолжить

1. Перестановкой из n – элементов некоторого n - элементного множества называется …

2. Сочетанием из n элементов по k …

3. Размещением из n по k называется …

Напиши формулу

4. A_n^k =

5. C_n^k =

6. P_n =

Выбери правильный ответ

7. Вычислите: $\overline{A}_3^5$.

а) 243; **б)** 152; **в)** 251.

8. Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами две различные путевки в санаторий?

а) 12; **б)** 30; **в)** 25.

9. За столом пять мест. Сколькими способами можно рассадить пятерых гостей?

а) 140; **б)** 50; **в)** 120.

10. Сколькими способами можно присудить шести лицам три одинаковые премии?

а) 30; **б)** 20; **в)** 15.

Реши задачу

11. На окружности отмечено 8 точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизначных ломаных с вершинами в этих точках?

12. В выпуклом n- угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали. На сколько частей они делят n- угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

15. Через каждую из трех данных точек проведем по m прямых так, чтобы из них не было двух, параллельных между собой, и трех, встречающихся в одной точке. Найдите число точек пересечения проведенных прямых.

Приложение 3

Комбинаторные задачи геометрического содержания

Задача 1. На плоскости проведено n прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

Решение

Каждая точка пересечения однозначно определяется парой проходящих через нее прямых. При этом порядок прямых роли не играет. Поэтому искомое число точек пересечения равно числу сочетаний из n по два, т.е. C_2^n .

Ответ: C_2^n.

Задача 2. На окружности отмечено несколько точек, *A* – одна из них. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих точку *A* или не содержащих её?

Решение

Отметим, что решение данной задачи можно осуществлять конкретно-индуктивным способом, начиная с перебора трех, четырех, пяти точек и т.д., затем выявляя определенную закономерность. Однако с нашей точки зрения, учащихся можно стимулировать к проведению общих рассуждений (реализуя абстрактно-дедуктивный способ). Для этого целесообразно задавать следующие наводящие вопросы.

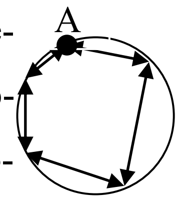


Рис. 5

– Как из n–угольника, не содержащего точку *A* можно получить многоугольник, содержащий точку *A*?

Ответ: добавлением точки *A*.

– Какие ограничения в этом случае накладываются на n?

Ответ: $n \geq 3$ (так как первыми многоугольниками, не содержащими точку *A*, к которым она будет добавляться, являются треугольники).

– Как из n–угольника, содержащего точку *A* можно получить многоугольник, не содержащий точку *A*?

Ответ: отбрасыванием точки *A*.

– Какие ограничения в этом случае накладываются на n?

Ответ: $n \geq 4$ ($n \neq 3$, так как от треугольника не сможем отбросить точку).

– Каких n–угольников больше – содержащих или не содержащих точку A?

Ответ: многоугольников, содержащих точку A, больше, чем многоугольников, не содержащих точку A (причем больше на число треугольников с вершиной A).

Задача 3. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых не самопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

Решение

Осуществим решение непосредственным пересчетом вариантов.

1) первую точку можно выбрать *10* способами;

2) после выбора первой точки выбираем вторую: чтобы ломанная не стала самопересекающейся, вторую точку можно выбрать двумя способами;

3) после выбора первой и второй точек выбираем третью: чтобы ломанная не стала самопересекающейся, третью точку можно выбрать двумя способами;

– и т.д. по аналогии каждую из следующих точек можно выбрать двумя способами, так как она должна быть соседней с одной из ранее выбранных точек (иначе получится самопересекающаяся ломаная);

9) последнюю точку выбираем из двух оставшихся – двумя способами.

Произведенный подсчет содержит в себе число, в два раза большее фактического количества ломанных, поскольку начало и конец при таком подсчете не различаются, вследствие этого делим результат на *2*. Следовательно, всего имеется $\frac{10 \cdot 2^{8}}{2} = 12$ ломаных.

Ответ: *1 280* ломаных.

Задача 4. В выпуклом n – угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали, причем никакие из них не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.

Решение

Каждая точка пересечения диагоналей определяет две диагонали, пересечением которых она является, а концы этих диагоналей определяют выпуклый четырехугольник. Обратно, любые четыре вершины многоугольника определяют одну точку пересечения диагоналей. Поэтому число точек пересечения диагоналей равно числу способов выбора четырех точек из *n*, т.е. равно $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}$.

Ответ: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}$.

Задача 5. В выпуклом *n* – угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали. На сколько частей они делят *n* – угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

Решение

Будем поочередно проводить диагонали. Когда мы проводим очередную диагональ, число частей, на которые проведены ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m + 1$, где m – число точек пересечения новой диагонали с ранее проведенными, т.е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят *n*-угольник, равно $D + P + 1$, где D – число диагоналей, P – число точек пересечения диагоналей. Ясно, что $D = \frac{n(n-3)}{2}$. Согласно предыдущей задаче $P = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Ответ: $P = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Задача 6. Найти точки пересечения диагоналей, лежащих внутри выпуклого *n*-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.

Решение

Если взять любые четыре вершины многоугольника, то через них можно провести четыре диагонали, имеющие две точки пересечения (кроме вершин). Из этих точек лишь одна внутри многоугольника. Значит, любая внутренняя точка пересечения диагоналей однозначно определяется выбором четверки вершин. Причем порядок вершин роли не играет. Итак, число таких четверок (а тем самым и внутренних точек пересечения диагоналей) равно C_n^4.

Ответ: число точек пересечения равно C_n^4.

Задача 7. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее $\frac{C_n^5}{n-4}$ различных выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

Доказательство

Внимание учащихся следует обратить на следующий факт: учитывая, что никакие три точки не лежат на одной прямой, можно сказать, что если выбрать четыре точки, то не всегда можно построить выпуклый четырехугольник, например (см. рис. 6).

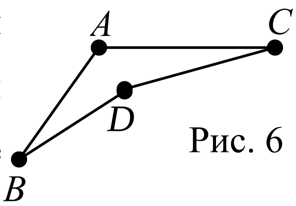


Рис. 6

Если выбрать любые пять точек, то существует выпуклый четырехугольник с вершинами в них. Так как выбор пяти точек есть составление сочетаний из n по пять, то количество таких выборов равно C_n^5.

Остается заметить, что четверку точек можно дополнить до пятерки ($n-4$) различными способами, поэтому существует не менее $\frac{C_n^5}{n-4}$ различных выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках. Ч.т.д.

Задача 8. Докажите, что число неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника равно ближайшему к $\frac{n^2}{12}$ целому числу.

Доказательство

Пусть всего имеется N неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника, причем из них N_1 правильных, N_2 неправильных равнобедренных и N_3 разносторонних. Каждый правильный треугольник равен одному треугольнику с фиксированной вершиной A, неправильный равнобедренный – трем треугольникам с вершиной A, а разносторонний – шести. Так как всего имеется $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ треугольников с вершиной A, то

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = N_1 + 3N_2 + 6N_3.$$

Ясно, что число неравных правильных треугольников равно 0 или 1, а число неравных равнобедренных равно $\frac{n-1}{2}$ или $\frac{n}{2}-1$, т.е. $N_1=1-c$, [illegible], где c и d равны 0 или 1. Поэтому

[illegible].

Так как $|3d-4c|<6$, то N совпадает с ближайшим к $\frac{n^2}{12}$ целым числом. Ч.т.д.

Задача 9. На плоскости дано n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Найдите число прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно.

Решение

Основное множество A состоит из n точек, которые условно можно пронумеровать: $A=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Из данного множества, согласно требованию задачи, получим подмножество B, состоящее из точек лежащих на одной прямой, которые можно пронумеровать, как 4, 5, т.е. $B=\{4,5\}$. Итак, число прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно равно числу сочетаний из n по 2, т.е. C_n^2.

Ответ: C_n^2 - число прямых.

Задача 10. Даны n точек, из которых m лежат на одной прямой. Кроме них, никакие три не лежат на одной прямой. Сколько прямы можно провести через эти точки?

Решение

Основное множество A состоит из n точек, которые условно можно пронумеровать: $A=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.Из данного множества, согласно требованию задачи, только 2 точки могут лежать на одной прямой. Получим подмножество B, состоящее из точек лежащих на одной прямой, которые можно пронумеровать, как 1, 2, т.е. $B=\{1,2\}$.В данном случае можно провести C_n^2 прямых.

В условия задачи сказано, что из n точек m лежат на одной прямой. Нам известно, что C_n^2 - это число всех прямых, которые можно провести из всех точек. Значит, чтобы ответить на вопрос задачи, мы из общего числа прямых вычтем прямые, которые проведены из точек лежащих на одной прямой. Следовательно, получим $C_n^2 - C_m^2$, C_m^2 - число прямых проведенных из точек лежащих на одной прямой, совпадающие прямые.

Ответ: $C_n^2 - C_m^2$.

Задача 11. На плоскости дано n точек, из которых m лежат на одной прямой, а из остальных никакие три точки не лежат на одной прямой. Найдите число треугольников, которые можно получить, соединяя эти точки по три.

Решение

Основное множество A состоит из n точек. Из данного множества. Чтобы построить треугольник нужны 3 точки. Значит, если имеем n точек, то число треугольников будет равно числу сочетаний из n по 3, т.е. C_n^3. Согласно требованию задачи, только m точек могут лежать на одной прямой. Значит, из общего числа треугольников нужно вычесть вырожденные треугольники, их число равняется C_m^3. Тогда, число треугольников равно $C_n^3 - C_m^3$.

Ответ: $C_n^3 - C_m^3$.

Задача 12. На плоскости даны три точки. Проведем через одну из них m прямых, через другую n прямых и через третью p прямых. Положив, что в числе этих прямых не находится трех, пересекающихся в одной точке, и двух, параллельных между собой. Найдите число треугольников, образованных пересечением проведенных прямых.

Решение

Найдем количество треугольников две стороны которых проходят через первую точку, пусть это будет точка A. При этом порядок выбора прямых проходящих через точку роли не играет. Поэтому искомое число сторон треугольника, проходящих через точку A равно числу сочетаний из m по два, т.е. C_m^2. Третью сторону треугольника можно выбрать $(n + p)$ способами. Тогда количество треугольников, 2 стороны которых проходят через точку A равно $C_m^2(n+p)$.

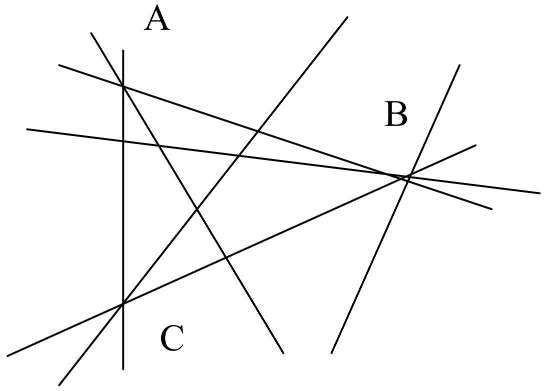


Рис.7

Рассуждая аналогично, число треугольников проходящих через точку *B* будет равно $C_n^2(m+p)$ и число треугольников проходящих через точку *C* - $C_p^2(m+n)$, а количество треугольников, стороны которых проходят через три данные точки равно *mnp*.

Тогда общее число треугольников - $C_n^2(m+p)+C_m^2(n+p)+C_p^2(m+n)+mnp$.

Ответ: $C_n^2(m+p)+C_m^2(n+p)+C_p^2(m+n)+mnp$.

Задача 13. На окружности последовательно отмечены точки A_1, A_2, …, A_{12}. Найдите

а) число хорд с концами в отмеченных точках;

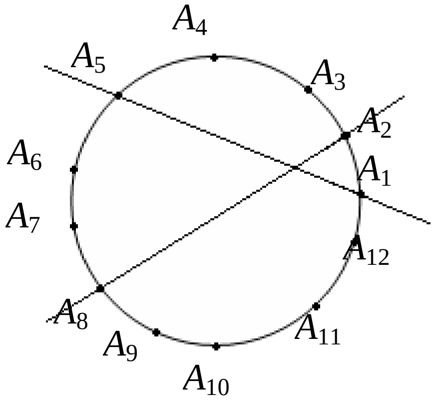
б) число треугольников с вершинами в отмеченных точках;

в) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках;

г) число треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой A_2A_8;

д) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой A_1A_5.

Решение



а) $C_{12}^2=66$;

б) $C_{12}^3=220$;

в) $C_{12}^4=495$;

г) проведем прямую A_2A_8, получим разделение окружности на две части, а в каждой из частей по пять точек: $C_5^3+C_5^3=20$;

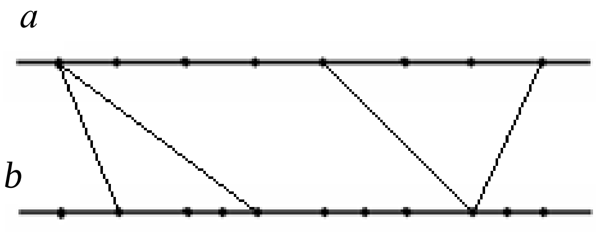
д) проведем прямую A_1A_5, останется 7 точек: $C_{12}^4-C_7^4=460$.

Ответ: а) 66; б) 220; в) 495; г) 20; д) 460.

Задача 14. На прямой отмечено 8 точек, на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников с вершинами в этих точках;

б) четырехугольников с вершинами в этих точках.

Решение



а) Чтобы построить треугольник необходимы три точки. Из условия задачи, следует, что на одной прямой их 8 на другой – 11. Обозначим прямую с 8 точками, как прямую *a*, прямую с 11 точками – прямая *b*. Соединение точек начнем с прямой *a*. Из точки 1проведем две прямые к точкам 1 и 2 на прямой *b*. Тогда число треугольников будет равно числу 8 сочетаний из 11 по 2, т.е. $8C_{11}^2$. Если начнем строить треугольники с прямой *b*, то число треугольников равно - $11C_8^2$. Тогда, число всех треугольников: $8C_{11}^2+11C_8^2=748$;

б) Чтобы построить четырехугольник берем по две точки каждой прямой. Общее число четырехугольников: $C_8^2 \cdot C_{11}^2=28 \cdot 55=1540$.

Ответ: а) 748; в) 1540.

Приложение 4

Дидактический материал для учащихся

Основные понятия и формулы комбинаторики

Перестановкой из n элементов называется любое расположение этих элементов в определенном порядке.

Размещением из n элементов по k ($k \le n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов.

Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, взятых из n элементов.

Основные формулы комбинаторики

Сочетания без повторений	Размещения без повторений	Перестановки без повторений
$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = n!$
Сочетание с повторениями	Размещения с повторениями	Перестановки с повторениями
$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$	$\overline{A}_n^k = n^k$	$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$

Упражнения и задачи

1. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

3. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

4. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из четырех человек для участия в эстафете на 100 + 200 + 400 + 800 (м). Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы A, B, C, D, E, F?

6. Вычислите: $C_5^3; C_3^5$.

7. Сколькими способами в игре «Спортлото» можно выбрать шесть номеров из 49?

8. У Робина – Бобина Барабека 40 соседей. Он решил пригласить двоих из них на обед. Сколько у него способов это сделать?

9. В прошлые века процветала генуэзская лотерея, сохранившаяся в некоторых странах и поныне. Участники этой лотереи покупали билеты, на которых стояло число от 1 до 90. Можно было купить и билеты, на которых было сразу 2, 3, 4 и 5 чисел. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержащего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали пять жетонов. Выигрывали те, у которых все номера на билетах были среди вынутых. Если участник лотереи покупал билет с одним числом, то он получал при выигрыше в 15 раз больше стоимости билета; если с двумя числами (амбо), то в 270 раз больше, если с тремя числами (терн) – в 5500 раз больше, если с четырьмя числами (катерн) – в 75 000 раз больше, а если с пятью числами (квин) – в 1 000 000 раз больше, чем стоит билет. Каково отношение «счастливых» билетов при игре, когда участник купил билет с одним числом?

10. В классе изучают девять предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть шесть различных уроков?

11. Сколькими способами можно опустить пять писем в 11 почтовых ящиков. Если в каждый ящик опускают не более одного письма?

12. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди семи учащихся группы в течение семи дней?

13. В классе имеется шесть сильных математиков. Сколькими способами из них можно составить команду на районную олимпиаду по математике, если от класса можно послать команду из четырех человек?

14. Сколькими способами можно выбрать пять делегатов из участников конференции, на которой присутствуют 15 человек?

15. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно:

а) назначить двух дежурных;

б) выбрать 28 человек для осеннего кросса.

16.На плоскости отмечены 10 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две из них проведена прямая. Сколько проведено прямых?

17. Сколько диагоналей имеет выпуклый двенадцатиугольник?

18. Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно (подсчитать варианты с помощью графа)?

19. Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, среди них 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?

20. При игре в крестики – нолики на поле размером 3 × 3 клетки неопытный первый игрок делает 1-й ход: ставит крестик в любую из клеток; вторым ходом второй неопытный игрок ставит нолик в любую из оставшихся свободных клеток, затем 3-м ходом первый игрок ставит крестик и т.д. Сколько существует вариантов заполненных клеток после: 1) двух ходов; 2) трех ходов; 3) четырех ходов?

21. Сколько ребер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин n, где: 1) $n = 12$; 2) $n = 37$?

22. В ларьке продается пять видов мороженного (не менее двух брикетов каждого вида). Оля и Таня покупают по одному брикету. Сколько существует вариантов такой покупки?

23. Мама решила сварить компот из фруктов двух видов. Сколько различных (по сочетанию видов фруктов) вариантов компотов может сварить мама, если у нее имеется 7 видов фруктов?

24. В оперном театре 10 певцов и 8 певиц, а в опере по замыслу композитора 5 мужских и 3 женских партии. Сколько существует различных певческих составов для спектакля, если известно, что:

а) все певцы и все певицы прекрасно ладят между собой;

б) певцы *А* и *Б* ни за что не будут петь вместе;

в) певец A будет петь тогда и только тогда, когда будет петь певица B;

г) 6 певцов накануне сорвали голос на футболе, и одной певице придется петь мужскую партию.

25. На плоскости проведено n прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

26. На окружности отмечено несколько точек, A – одна из них. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих точку A или не содержащих её?

27. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых не самопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

28. В выпуклом n – угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали. На сколько частей они делят n – угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

29. В выпуклом n – угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали, причем никакие из них не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.

30. Найти точки пересечения диагоналей, лежащих внутри выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.

31. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее $\frac{C_n^5}{n-4}$ различных выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

32. Докажите, что число неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника равно ближайшему к $\frac{n^2}{12}$ целому числу.

33. На плоскости дано n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Найдите число прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно.

34. Даны n точек, из которых m лежат на одной прямой. Кроме них, никакие три не лежат на одной прямой. Сколько прямы можно провести через эти точки?

35. На плоскости дано n точек, из которых m лежат на одной прямой, а из остальных никакие три точки не лежат на одной прямой. Найдите число треугольников, которые можно получить, соединяя эти точки по три.

36. На плоскости даны три точки. Проведем через одну из них m прямых, через другую n прямых и через третью p прямых. Положив, что в числе этих прямых не находится трех, пересекающихся в одной точке, и двух, параллельных между собой. Найдите число треугольников, образованных пересечением проведенных прямых.

37. На окружности последовательно отмечены точки A_1, A_2, …, A_{12}. Найдите

а) число хорд с концами в отмеченных точках;

б) число треугольников с вершинами в отмеченных точках;

в) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках;

г) число треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой A_2A_8;

д) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой A_1A_5.

38. На прямой отмечено 8 точек, на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует

а) треугольников;

б) четырехугольников с вершинами в этих точках.

39. В почтовом отделении продают открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

40. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4 см, 5 см, 6 см и 7 см?

41. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых выражаются натуральными числами от 1 до 10?

42. Сколькими способами можно составить команду из четырех человек для соревнований по бегу, если имеется семь бегунов?

43. Сколькими способами можно разделить шесть различных конфет между тремя детьми?

44. В некотором сказочном королевстве не было двух человек с одинаковым набором зубов. Каково может быть наибольшее число жителей этого королевства, если у человека 32 зуба?

45.*Задача-шутка*. Как-то раз в воскресенье семеро друзей зашли в кафе. Хозяин кафе сказал, что если друзья в каждое следующее воскресенье будут садиться по-разному и перепробуют все способы посадки, то с этого момента он обещает кормить всех мороженным бесплатно. Удастся ли друзьям воспользоваться предложением хозяина кафе?

46. Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на который поставлено 12 приборов?